АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

4281—4676

*

№ 8 1954

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

В. В. Алатов, А. П. Лебедев, С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, Д. Ю. Панов (председатель редколлегии), Б. Н. Рутовский, Л. И. Седов, Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии 3
Основания математики и математическая логика 4
Теория чисел 10
Алгебра 14
Многочлены и линейная алгебра 14
Группы 14
Поля, кольца и структуры 15
Топология 20
Теория функций действительного переменного 23
Теория множеств 24
Приближение функций полиномами и их обобщениями 27
Теория функций комплексного переменного 28
Дифференциальные уравнения 31
Обыкновенные дифференциальные уравнения 31
Уравнения в частных производных . . . 37
Приложения к физике, технике и естественным наукам 41
Интегральные уравнения 45
Вариационное исчисление 45
Приложения интегральных уравнений . —
Анализ (другие вопросы) 46
Числовые ряды 50
Специальные функции 50
Интегральные преобразования и операционное исчисление 52
Приложения общих методов математического анализа 52
Функциональный анализ 54
Теория вероятностей 62
Математическая статистика 64
Теория игр . . . . . —
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов в технике . . . 66
Геометрия 68
Приложение геометрии 69
Проективная и начертательная геометрия 70
Алгебраическая геометрия 71
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 72
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 73
Метрические методы в геометрии 75
Геометрия выпуклых многообразий . . 76
Численные и графические методы 79
Таблицы 82
Алгебра электрических цепей . . . . . —
Вычислительные машины и математические приборы 84
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 92
Авторский указатель . . . . . I—IV

Адрес редакции: Москва, Д-219, Балтийский пос., д. 42 Б.

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, В. М. Курочкин, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, С. П. Фиников, С. В. Фомин*

Рефераты 4281—4676 **№ 8** **Август 1954 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

4281. **Наука и жизнь.** Коммунист, 1954, № 5, 3—13
Передовая о задачах советской науки.

4282. **Достижения и задачи естественных и технических наук.** Несмеянов А., Коммунист, 1954, № 6, 60—77

4283. **Задачи Академии наук СССР в свете решений XIX съезда Коммунистической партии Советского Союза.** Несмеянов (A Szovjetunió tudományos akadémiájának feladatai az SzKP XIX. kongresszusának határozatai alapján. Nyeszmejanov A. N.), Akadémiai értesitö, 1953, 60, № 501, 225—252 (венг.)

Доклад А. Н. Несмеянова на сессии Академии наук СССР (РЖМат, 1953, 1).

4284. **Научно-отчетная конференция Отделения физико-математических наук.** Вестн. АН КазахССР, 1954, № 1, 114—115

Сообщение о докладах и выступлениях при обсуждении результатов работы Отделения в 1953 г.

4285. **В странах народной демократии** (В країнах народної демократії), Наука і життя, 1954, № 2, 32 (укр.)

4286. **Итоги конференции руководителей научно-исследовательских институтов Китайской академии наук. Физико-математическая секция** (中國科學院所長會議物理學數學組會議總結), 科學通報 (Кэсюэ тунбао), 1954, № 1, 4—6 (кит.)

4287. **Краткий обзор результатов работы Института математики Китайской академии наук за 1953 г.** Лу Ци-цзянь (中國科學院數研究所1953 研究工作成果簡單介紹。陸啓鏗), 科學通報 (Кэсюэ тунбао), 1954, № 2, 76, 22 (кит.)

4288. **Конгресс математиков в Варшаве.** Хайош (A Varsói matematikai kongresszusról. Hajós Gyögy), Akadémiai értesitö, 1953, 60, № 501, 294—296 (венг.)

4289. **Польский математический конгресс** (Polish mathematical congress), Nature, 1953, 172, №4388, 1033 (англ.)

Краткие сведения о математическом конгрессе, состоявшемся 5—12 сентября 1953 г. в Польше, и о состоянии польской математической науки.

4290. **IV очередное годичное собрание Физико-математического общества Хорватии.** Вучкич (IV. redovna godišnja skupština Društva matematičara i fizičara N. R. Hrvatske. Vučkić M.), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1953, сер. 2, 8, № 1, 68—69 (хорв.)

4291. **IV пленум Совета Физико-математического общества Югославии.** Янкович (IV. plenum Saveza Društava matematičara i fizičara FNRJ. Jankovićć Z.), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1953, сер. 2, 8, № 1, 69 (хорв.)

4292. **Выводы из сообщения секретаря на IV очередном годичном собрании Физико-математического общества Хорватии.** Янкович (Izvadak iz izvještaja tajnika na IV. redovnoj godišnjoj skupštini Društva matematičara i fizicara N. R. Hrvatske. Jankovićć Z.), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1953, сер. 2, 8, № 1, 70—73 (хорв.)

4293. **Состоявшиеся коллоквиумы** (Održani kolokviji), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1953, сер. 2, 8, № 1, 66—68 (хорв.)

Приводится тематика состоявшихся двенадцати коллоквиумов по математике, физике и методике.

4294. **Шестая конференция по прикладной математике** (The Sixth symposium in applied mathematics), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, 59, № 6, 513—514 (англ.)

Приводятся названия докладов.

4295. **Годичное собрание Математической ассоциации** (Mathematical Association. Annual meeting), Nature, 1954, 173, № 4397, 247—248 (англ.)

4296. **Резюме докладов, прочитанных на 112-ом годичном собрании Американской статистической ассоциации, состоявшемся в Чикаго 27—30 де-**

кабря 1952 г. (Summaries of papers delivered at the 112-th annual meeting of the American Statistical Association in Chicago, December 27 to 30, 1952. Ed. Alchian Armen A.), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, **48**, № 263, 615—644 (англ.)

Приводятся краткие резюме 93 докладов.

4297. Памяти Г. Ф. Вороного. Сакович Г. Н., Вестн. АН СССР, 1954, № 2, 119—121

Сообщение о заседании в Институте математики Академии наук Украинской ССР, посвященном исполнившемуся 20 ноября 1953 г. 45-летию со дня смерти Г. Ф. Вороного.

4298. Дискуссия (Diskuse), Slaboproudý obzor, 1953, **14**, № 11, 500—501 (чеш.)

Две статьи к дискуссии на тему «Математика в технике и физике» (РЖМат, 1954, 3568).

4299. Происхождение и развитие математических понятий. Уайлдер (The origin and growth of mathematical concepts. Wilder R. L.), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 5, 423—448 (англ.)

Основная мысль автора — показать, что развитие математических понятий и развитие математики вообще есть непрерывный процесс, где каждый новый шаг подготовляется предшествующим развитием, истоки которого прослеживаются до глубокой древности. «Понятие не возникает внезапно в готовом виде подобно Венере из волн», хотя так и может казаться отдельному математику. Обычно его элементы лежат в том, что можно назвать «потоком математической культуры». Эти соображения подтверждаются указаниями на возникновение арифметики, аналитической геометрии, анализа и более детальным рассмотрением развития понятия кривой, начиная от греков и кончая новейшей топологией. Автор иронически отзывается о тех, кому кажется странным, что в науке часто одни и те же идеи приходят независимо разным ученым. В этом, он говорит, нет ничего странного, а напротив, это как раз то, что нужно ожидать, если быть знакомым с тем, как развиваются понятия.

В общем, выводы автора известны и понятны каждому, кто понимает развитие науки как закономерный процесс с его диалектикой нового и старого. Автор, однако, ограничивается почти целиком внутренним развитием математики, не привлекая в рассмотрение ее связи с естествознанием и тем более с общественным развитием. Статья заканчивается полемикой против реакционеров типа Шпенглера, который в его «Закате Европы» предвещал конец развития математики. Делая некоторые интересные замечания, касающиеся его личной практики, автор высказывает оптимистическое убеждение в том, что «математика только приближается к своей зрелости и в течение ближайших 50 лет даст еще новые понятия и методы, которые ее революционизируют».

А. Д. Александров

4300. Не называйте это наукой. Фостер (Don't call it science. Foster James E.), Math. Mag., 1953, **26**, № 4, 209—214 (англ.)

Рассматриваются вопросы определения математики и ее отношения к другим наукам. Математика определяется как область абстрактного следования. Ее дедуктивный характер противопоставляется индуктивному характеру всех прочих наук и делается вывод, что математика не есть наука. Такой неправомерный тезис автора обусловлен формализмом и эмпиризмом его исходных методологических позиций.

А. Л. Субботин

4301 К. Список периодических изданий по математике и физике, представленных в Библиотеке Сорбонны. Систрунк (État des périodiques de mathématiques et de physique figurant à la Bibliothèque de la Sorbonne. Siestrunck Marthe Chardot, 80 p., autographie, Secrétariat mathématique, Paris, 1953, 2 fasc. (Documentation math., fasc. 24—25)), Bibliogr. France, 1954, **143**, № 2, 27 (библ.)

4302. К. Квадратура круга и другие монографии. Хобсон, Хадсон, Сингх, Кемп (Squaring the circle and other monographs. Hobson E. W., Hudson H. P., Singh A. N., Kempe A. B., IV + 57 pp.; IV+ +143 pp.; VII + 110 pp.; III + 51 pp.; Chelsea Publishing Company, New York, N. Y., 1953, 3. 25 doll.) (англ.)

Эта книга является фото-офсетным воспроизведением следующих книг: Хобсон, Квадратура круга (Hobson E. W., Squaring the curcle, Cambridge, 1913); Хадсон, Линейка и циркуль (Hudson H. P., Ruler and compasses, Longmans Green, London, 1916); Сингх, Теория и построение недифференцируемых функций (Singh A. N., The theory and construction of non-differentiable functions, Lucknow Univ. Press, 1935); Кемп, Как провести прямую линию (Kempe A. B., How to draw a straight line; a lecture on linkages, Macmillan, London, 1877).

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 11, 1114.

4303 К. Математические фантазии и парадоксы. Нортроп (Fantaisies et paradoxes mathématiques (Riddles in mathematics). Northrop Eugene Purdy, traduit., VI + 225 p., fig., couv. en coul., Dunod (impr. de Hemmerle, Petit et Cie), Paris, 1954), Bibliogr. France, 1954, **143**, № 3, 54 (библ.)

4304 К. Числа, размеры и функции в строительном деле. Мичке, Кастор (Zahlen, Maße und Funktionen im Bauwesen. Die mathematischen Grundlagen für Bautechniker, Architekten und Bau-Ingenieure. Mitschke W., Castor J., 1. Aufl., 176 S. Taf., Otto-Eisner-Verlagsgesellschaft, Darmstadt, 1953, 7.80 DM), Tonindustrie-Ztg., 1953, **77**, № 15—16, 290 (библ.)

4305 РЕЦ. Энциклопедия математических наук. Т. II. Ч. I, II. Шмидт (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Vol. II, Part I, II (Mathematische Grundlagenforschung). Schmidt A., Teubner, Leipzig, 1950) [**Рецензия: Гудстейн** (Goodstein R. L.), Mth. Gaz., 1953, **37**, № 319, 80 (англ.)]

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

4306. Развитие абстрактной науки у греков. Фаррингтон (The rise of abstract science among the greeks. Farrington B.), Centaurus, 1953, **3**, № 1—2, 32—39 (англ.)

Автор приходит к следующим выводам о развитии абстрактной науки в Древней Греции:

1) это развитие явилось продолжением тенденций, имевшихся уже в науке Ближнего Востока; 2) характерный для греческой науки высокий уровень абстракции объясняется скорее общественной жизнью греков, чем их расовыми особенностями; при этом появление независимых греческих государств-городов автор связывает, в основном, с развитием обработки железа и с созданием звукового алфавита; 3) занятие абстрактной наукой было привилегией свободных граждан, которые относились с пренебрежением к выполнявшимся рабами практическим работам. Полагая, что логическое мышление свойственно только свободному человеку, древние греки развивали абстрактную науку не для исследования раскрываемых практикой законов природы, а для бегства от практики в мир чистого интеллекта.

Многие положения автора весьма спорны. Нельзя согласиться с его утверждением, что греческая наука в целом развивалась преимущественно в отрыве от практики. *И. Г. Башмакова*

4307. Французская революция и прогресс науки. Татон (The French Revolution and the progress of science. Taton R.), Centaurus, 1953, **3**, № 1—2, 73—89 (англ.)

Автор статьи не дает принципиальной оценки Великой французской буржуазной революции конца XVIII в. как общественного явления, но признает, что революция благоприятно повлияла на развитие французской науки, обеспечив ей главенствующее место в мировой науке. Создание системы технического образования, по мнению автора, особенно способствовало прогрессу науки. Этому вопросу и посвящена в основном статья.

Дается беглый обзор развития научной жизни во Франции до революции; основное внимание уделяется вопросам образования, при этом отмечается прогрессивная роль энциклопедистов в проблеме технического образования.

Рассматривается деятельность ученых в революционный период, особенно отмечается работа математиков, преданных делу революции. Автор указывает, что Монж, уже известный геометр и физик, был с августа 1792 г. по май 1793 г. морским министром и вместе с математиком Вандермондом и другими сыграл важную роль в организации производства вооружения и военного снаряжения. Лазарь Карно, бывший ученик Монжа, уже известный как автор «Трактата о машинах», позже ставший одним из творцов новейшей геометрии, был активным членом комитета Совета Безопасности и написал знаменательную работу «Организация победы», где анализируются организационные возможности революции.

Одной из трудностей, на которые натолкнулась демократизация национального просвещения, проводившаяся во время революции, был недостаток в кадрах учителей. Организованное в начале 1795 г. в Париже обучение будущих учителей проводилось с участием математиков: Лагранжа, Лапласа, Монжа, Вандермонда и др. Автор много внимания уделяет Политехнической школе, которая была создана во время революции и имела своей целью воспитание инженеров для различных отраслей техники. В планировании программ и создании методов обучения в этой школе важная роль принадлежала Монжу. В школе математике отводилось основное место. Монж — создатель начертательной геометрии, считал последнюю существенным оружием архитектора, инженера и художника. Как утверждает автор, Политехническую школу можно считать прототипом технических институтов, возникших в XIX в. в различных странах. В начале XIX в. она была самым передовым научным центром. От нее исходило много новых идей и направлений, которые придали иную форму науке, в частности: преобразование геометрии (Монж); новые требования к строгости в анализе (Лагранж, Лакруа и Коши); развитие экспериментальных методов в физике и химии; создание математической физики (Лаплас, Фурье, Ламэ), теории света (Био, Араго, Френель) и электромагнитной теории (Ампер); рождение термодинамики (Сади Карно); развитие и совершенствование новой химии (Бертолет и Гей-Люссак) и т. д.

Политехническая школа издавала два журнала, в которых печатались статьи преподавателей и учеников. Влияние школы чувствовалось во всех областях техники, в механике, производстве, военной науке и т. д., а также в возникновении различных философских и политических идей, которые играли важную роль в тот период, — фурьеризма, сен-симонизма, позитивизма.

Вслед за Политехнической во Франции возникли другие подобные ей школы. В это же время были реорганизованы пришедшие в упадок обсерватории. В 1795 г. создается Бюро долгот. Важным вкладом революции в прогресс науки автор считает также введение метрической системы, причем первым, кто предпринял составление тригонометрических и логарифмических таблиц в новых единицах измерения, указывается Прони.

В конце статьи дается обширный список литературы, насчитывающий 51 название. В этом списке указывается одна советская работа: книга О. Старосельской-Никитиной «Очерки по истории науки и техники периода Французской буржуазной революции 1789—1794 гг.», изданная АН СССР в 1946 г. *Р. А. Симонов*

4308. Леонардо-да-Винчи. Пранди (Léonard de Vinci. Prandi Adriano), Rev. univers. mines, 1953, сер. 9, **9**, № 9, 693—724 (франц.)

4309. Николай Иванович Лобачевский. Феттер (Nikolaj Ivanovič Lobačevskij. Vetter Quido), Mat.-přírodověd. rozhl., 1953, **32**, № 4, 119—124 (чеш.)

Краткий очерк жизни и научной деятельности знаменитого русского математика Николая Ивановича Лобачевского (к 160-летию со дня рождения).

4310. Александр Михайлович Ляпунов. Гнеденко (Aleksandr Michajlovič Ljapunov. Gnedenko B. V. (Přeloženo z knihy «Přehled dějin matematiky v Rusku», vydal OGIZ r. 1946,

§ 13, str. 133—143)), Časop. pestov. mat., 1953, 78, № 1, 105—112 (чеш.)

Перевод § 13, стр. 133—143, из книги Б. В. Гнеденко «Очерки по истории математики в России», Гостехиздат, М.—Л., 1946.

4311. Пафнутий Львович Чебышев. Гнеденко (Pafnutij Lvovič Čebyšev. Gnedenko B. V., Přeloženo z knihy «Přehled dějin matematiky v Rusku» vydal OGIZ, r. 1946, §11, str. 112—125, a dodatek 3., str. 232—239), Časop. pěstov. mat., 1953, 78, № 1, 89—103 (чеш.)

Перевод § 11, стр. 112—125, и дополнения 3, стр. 232—239, из книги Б. В. Гнеденко «Очерки по истории математики в России», Гостехиздат, М.—Л., 1946.

4312. Евграф Степанович Федоров (К столетию со дня рождения). Шафрановский И. И., Зап. Всес. минералог. об-ва, 1953, 82, № 4, 241—246.

4313. Дьюла Сёкефалви-Надь (Szökefalvi-Nagy Gyula), Mat. lapok, 1953, 4, № 2—3, 81—83 (венг.)

14 октября 1953 г., в возрасте 66 лет, в Сегеде скончался действительный член Венгерской академии наук, почетный президент Математического об-ва им. Яноша Бойаи проф. Дьюла Сёкефалви-Надь.

4314 К. Первоисточники по математике. Основные черты догреческой и греческой математической мысли. Брёйнс (Fontes matheseos. Hoofdpunten van het prae-griekse en griekse wiskundig denken. Bruins E. M.), XII + 168 pp., 6 plates, E. J. Brill, Leiden, 1953, 7.15 guilders (голл.)

Это пособие составлено в первую очередь для учащихся голландских гимназий («классических» средних школ). Оно содержит ряд оригинальных греческих текстов с введениями по голландски (но без переводов), подобранных с целью осветить трактовку простых проблем в греческой математике. Тексты взяты из «Метрики» Герона (главным образом — правила вычисления площадей и объемов, а также извлечения квадратных и кубических корней), «Менона» Платона (диагональ квадрата), из Архимеда (вычисление π, суммирование квадратов n первых натуральных чисел, площадь параболического сегмента, «Псаммит» и гидростатический закон) и Птолемея (составление таблицы хорд). Книга начинается кратким (23 стр.) введением в египетскую и вавилонскую математику; в нем дается объяснение воспроизведенного в книге иератического текста о дробях. Воспроизведены и некоторые вавилонские тексты, а также страница из Константинопольского геронова кодекса.

«Начала» Евклида в сборник не включены главным образом потому, что автор считает нежелательным выбирать отрывок из аксиоматически построенной системы; кроме того, знание «Начал» необязательно для правильного понимания многих философских сочинений. *D. J. Struik*

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 831.

4315 К. Бируни и его работы по астрономии и математической географии. Садыков Х. У. Под ред. Б. В. Кукаркина, 152 стр. с илл., Гостехиздат, М., 1953, 4 р. 40 к.

4316 К. Труды. Галилей (Opere. Galilei Galileo. Acura di F. Flora, XXIX + 1139 pp. Milano-Napoli, Riccardo Ricciardi, 1953)

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 11, 1050.

4317 К. Михаил Васильевич Остроградский — выдающийся ученый. Григорьян А. Т. Пособие для учителей, 40 стр., Учпедгиз, М., 1953, 55 коп.

4318 К. Паскаль, его жизнь и труды. Менар (Pascal, his life and works. Mesnard Jean, Philosophical Library, 3.75 doll.), Scient. American, 1953, 189, № 3, 146 (библ.)

См. также: 4297, 4299, 4536

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

4319. Замечание о теории множеств, основанной на положительной логике. Сколем (A remark on a set theory based on positive logic. Skolem Th.), Norske Vid. Selsk. Forh., Trondheim, 1952, 25, 112—116 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Из парадокса Рассела видно, что двузначная логика не годится для интуитивной теории множеств. Но, как показывается здесь, невозможно построить интуитивную теорию множеств даже в системе, вовсе не содержащей отрицания. Возьмем в качестве аксиом интуитивной теории множеств: 1) если $\varphi(x)$ — пропозициональная функция, то $\hat{x}\varphi(x)$ есть множество и $(y \varepsilon \hat{x}\varphi(x)) \equiv \varphi(y)$; 2) $(x = y) \equiv (z)((x \varepsilon z) \supset (y \varepsilon z))$. Тождество множеств определяется по объемности: $(x = y) \equiv (z)((z \varepsilon x) \equiv (z \varepsilon y))$. Средствами одного только положительного исчисления предикатов (Hilbert D., Bernays P., Grundlagen der Mathematik, vol. 1, Springer, Berlin, 1934, 68), т. е. исчисления предикатов первой ступени, основанного на конъюнкции, дизъюнкции и импликации, показывается, что в любой такой теории множеств все множества должны быть тождественны, а поэтому теория — тривиальной. Для этой цели введем обозначения 'Λ' для '$\hat{x}(y)(x \varepsilon y)$', '$\dot{V}$' для '$\hat{x}((x \varepsilon x) \supset (x \varepsilon x))$', '$\dot{\dot{V}}$' для '$\hat{x}((x \varepsilon x) \supset (x \varepsilon \Lambda))$'. Тогда $\dot{V} \varepsilon \dot{V} \equiv ((\dot{V} \varepsilon \dot{V}) \supset (\dot{V} \varepsilon \Lambda))$, что после упрощения дает $\dot{V} \varepsilon \Lambda$. Далее, по определению Λ, $(y)(\dot{V} \varepsilon y)$. Если теперь введем обозначение '$\{m\}$' для '$\hat{x}(x = m)$', то $\dot{V} \varepsilon \{m\}$, откуда $\dot{V} = m$; поэтому $m = n$ для любых m, n. Отмечается, что использованная здесь логика слабее интуиционистской. Указывается, однако, что в такой системе теории множеств каждое предложение P, выразимое в этой системе, доказуемо в ней. Это делается при помощи парадокса Карри (Curry): введем 'S' для '$\hat{x}((x \varepsilon x) \supset P)$'; тогда

$(S \varepsilon S) \supset ((S \varepsilon S) \supset P)$, откуда $(S \varepsilon S) \supset P$. Отсюда следует $S \varepsilon S$ и далее P. *I. L. Novak Gàl*

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 10, 937.

4320. Некоторые замечания о доказательстве Хенкина полноты исчисления предикатов первой ступени. Хазенйегер (Eine Bemerkung zu Henkin's beweis für die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe. Hasenjaeger G.), J. Symbolic Logic, 1953, **18**, № 1, 42—48 (нем.)

Автор излагает дальнейшее упрощение предложенного Хенкиным (Henkin L., J. Symbolic Logic, 1949, **14**, № 3, 159—166) доказательства теоремы о полноте узкого исчисления, причем отмечает, что аналогичное упрощение также было найдено Хенкиным. Теорема о полноте в упомянутой работе формулируется Хенкиным так:

Если Λ — непротиворечивое множество замкнутых (т. е. не содержащих свободных индивидуальных переменных) формул некоторого формализма S_0, получающегося путем присоединения к исчислению предикатов постоянных символов: предикатных, бесконечного множества индивидуальных, а также суждений и некоторых формул в качестве аксиом, то Λ одновременно выполнимо в некоторой области индивидуумов той же мощности, что и множество первоначальных символов из S_0.

Понятия модели и одновременной выполнимости определяются естественным образом. Идея доказательства состоит в построении некоторого множества замкнутых формул Γ_ω из некоторого формализма S^*, содержащего по сравнению с S_0 бесконечно много (столько, сколько имеется формул в S_0) новых постоянных индивидуальных символов и обладающего свойствами: 1) Γ_ω есть максимальное непротиворечивое множество замкнутых формул из S_ω; 2) если формула вида $(\exists x)A$ содержится в Γ_ω, то Γ_ω содержит также некоторую формулу, получающуюся из A подстановкой некоторого постоянного индивидуального символа из S_ω вместо всех свободных схождений x в A. Областью, на которой Λ одновременно выполнимо, является множество постоянных индивидуальных символов из S^*.

Множество Γ_ω строится так: вполне упорядочивается по типу некоторого алефа множество формул из S_ω (если в S_0 несчетное множество символов, это требует аксиомы выбора), замкнутые формулы вида $(\exists x)A(x)$ располагаются при этом в некоторую последовательность $(\exists x)A_i(x)$; полагаем (по индукции) j_{i+1} равным наименьшему j такому, что u_j не входит в $A_s(u_{j_s})$, $s < i+1$, и в $(\exists x)A_{i+1}(x)$; присоединяем к Λ все формулы вида $(\exists x)A_i(x) \supset A_i(u_{j_i})$ и погружаем полученное множество Λ^*, непротиворечивость которого легко устанавливается, в максимальное непротиворечивое множество замкнутых формул (построение которого основано на пересчете всех формул и на теореме о дедукции). Если исходное исчисление содержит знак равенства, рассматриваемый как логический, то результат сохраняет силу с той лишь разницей, что мощность области индивидуумов модели может оказаться меньше мощности множества символов S_0.

Автор получает также оценку для наинизшего проективного класса в смысле Мостовского (Mostowski A., Fundam. math., 1947, **34**, 81—112), которому должны принадлежать все предикаты модели (если она состоит из натуральных чисел и определенных для них предикатов), а именно, эта оценка оказывается $\mathbf{P}_2 \cap \mathbf{Q}_2$, если система Λ разрешима (т. е. множество $\underline{\Lambda}$ номеров формул из Λ рекурсивно). Если $\underline{\Lambda} \in \mathbf{P}_{k+1}$ или если $\underline{\Lambda} \in \mathbf{Q}_k$, то существует модель для Λ в $\mathbf{P}_{k+2} \cap \mathbf{Q}_{k+2}$. Эти результаты справедливы и для узкого исчисления со знаком $=$. Вопрос о том, не поддаются ли указанные оценки усилению, остается открытым.

Примечание референта. Автор не отмечает, что теорема о полноте в таком виде, как она доказывается Хенкиным, была впервые доказана А. И. Мальцевым (Матем. сб., 1936, **1 (43)**, 323—336). *А. С. Есенин-Вольпин*

4321. Неразрешимость некоторых простых формальных теорий. Яничак (Undecidability of some simple formalized theories. Janiczak A.), Fundam. math., 1953, **40**, 131—139 (англ.)

Автор исследует разрешимость некоторых элементарных теорий, в которых константы являются двоичными отношениями, а аксиомы приписывают этим отношениям некоторые хорошо известные свойства. Теории, рассматриваемые автором, можно коротко описать следующим способом:

Теория T_1 имеет константы R_0, R_1, $=$, а аксиомы утверждают, что R_0 и R_1 рефлексивны, симметричны и транзитивны (р. с. т.), а конъюнкция $R_0 \cdot R_1$ эквивалентна тождеству. Теория T_2 отличается от T_1 тем, что не содержит тождества. Теория T_3 имеет одну константу R_0, а аксиомы утверждают, что R_0 р. с. т. Теория T_4 имеет константы F, R_0, $=$, а аксиомы утверждают, что R_0 р. с. т., а F взаимно однозначно. Наконец, T_5 имеет константы F, F_1, $=$, а аксиомы утверждают, что отношение F взаимно однозначно, а F_1 однозначно. Автор доказывает, что теории T_1, T_2, T_4, T_5 неразрешимы, а T_3 разрешима.

Доказательства неразрешимости опираются на теорему Мостовского и Тарского о неразрешимости теории T_0 колец, упорядоченных изолированным образом, и связаны с интерпретациями теории T_0 в теориях T_1, T_4, T_5. Важным результатом весьма общего характера является теорема о неразрешимости класса тех выражений логики, в которых встречаются переменные трех типов: 1) индивидуум; 2) типа предиката от одного аргумента, имеющего тип индивидуума; 3) типа предиката от одного аргумента, имеющего тип 2), причем переменные типа 3) являются лишь свободными. Этот же результат был получен другим методом в работе Чёрча и Куайна (Church A., Quine W. V. O, J. Symbolic Logic, 1952, **17**, 179—187). *S. Jaśkowski*

4322. Самодвойственные примитивные для модальной логики. Роз (Self-dual primitives for modal logic. Rose Alan), Math. Ann., 1953, **125**, № 3, 284—286 (англ.)

Система функций (операторов), на базе которых строятся формулы исчисления, называется

примитивной (базисной). Однако часто бывает удобно переходить от одних примитивных к другим. С этой целью берут за новые примитивные некоторую систему формул, выраженных через исходные примитивные, такую, что для всякой формулы в первоначальном базисе найдется эквивалентная ей формула в новом базисе (эквивалентные базисы).

В заметке исследуется подобная задача применительно к модальной логике. Рассматривается система S2, основанная на аксиомах Льюиса: B1. $pq \cdot \prec \cdot qp$; B2. $pq \cdot \prec \cdot p$; B3. $p \cdot \prec \cdot pp$; B4. $(pq)r \cdot \prec \prec \cdot p\,(qr)$; B5. $p \prec \sim(\sim p)$; B6. $p \prec q \cdot q \prec r : \prec \cdot p \prec r$; B7. $p \cdot p \prec q : \prec \cdot q$; B8. $\Diamond\,(pq) \prec \Diamond p$ (базисными функциями являются pq, $\sim p$ (отрицание) и $\Diamond p$ (возможность); знаки $\cdot$, : и т. д. употребляются вместо скобок; $p \prec q$ понимается как сокращенная запись $\sim\Diamond\,(p \sim q)$) и правилах вывода: 1. подстановки, 2. замены на эквивалентное (эквивалентность $p = q$ понимается как $p \prec q \cdot q \prec p$), 3. $\dfrac{p, q}{pq}$ и 4. $\dfrac{p, p \prec q}{q}$. Соответствующие функции истинности задаются таблицами

	pq				$\sim p$	$\Diamond p$	$p \prec q$			
p \ q	1	2	3	4	–	–	1	2	3	4
1	1	2	3	4	4	1	1	4	4	4
2	2	2	4	4	3	1	1	1	4	4
3	3	4	3	4	2	1	1	4	1	4
4	4	4	4	4	1	4	1	1	1	1

Оказывается, что если к аксиомам Льюиса присоединить аксиомы $\sim\Diamond i$ и $\sim\Diamond\sim n$, то имеет место теорема:

Константы n и i, обозначающие соответственно необходимое и невозможное высказывания, и функция $[r, p, s, q, r]$ с теми же значениями, что и

$$(p \cdot \sim\Diamond\sim r) \vee (((p \cdot s) \vee (q \cdot \sim s)) \cdot \Diamond r \cdot \Diamond\sim r) \vee \vee (q \cdot \sim\Diamond r)$$

(здесь $p \vee q =_{\mathrm{df}} \sim(\sim p \cdot \sim q)$) образуют примитивную систему, эквивалентную исходной, причем примитивная функция $[r, p, s, q, r]$ является самодвойственной относительно $\sim$. Построенные базисные функции являются независимыми.

Автор отмечает, что после того как им был сообщен результат, Ван-дер-Варден, построил более простую примитивную систему: константы n и i и самодвойственная примитивная функция $[p, q, r]$ с такими же значениями как и

$$(\sim\Diamond r \cdot p \cdot q) \vee (\sim\Diamond\sim p \cdot q \vee r) \vee (\Diamond r \cdot \Diamond \sim p \cdot \sim q).$$

Примечание референта. Примитивная функция (оператор) $f(,,\ldots,)$ называется самодвойственной относительно $\sim$, если функция $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sim f(\sim x_1, \sim x_2, \ldots, \sim x_n)$, являющаяся двойственной к функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ относительно $\sim$, есть $f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$, где $\begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, n \\ i_1, i_2, \ldots, i_n \end{pmatrix}$ — некоторая подстановка из n чисел. Это определение отличается от определения самодвойственности функций, где требуется, чтобы функция была тождественна двойственной себе функции относительно $\sim$, т. е. чтобы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sim f(\sim x_1, \sim x_2, \ldots, \sim x_n)$.

С. В. Яблонский

4323. Новые аксиоматизации S3 и S4. Саймонс (New axiomatizations of S3 and S4. Simons Leo), J. Symbolic Logic, 1953, **18**, № 4, 309—316 (англ.)

Известно, что Льюисом (Lewis C. I., Langford C. H., Symbolic logic, New York, 1932) были предложены аксиоматики для систем строгой импликации S1—S5, исходящие из схем аксиом B1—B8 (см. реф. 4322), а также схем аксиом

A1 $pq \cdot \prec \cdot qp$, A5 $p \prec \sim(\sim p)$,

A2 $qp \cdot \prec \cdot p$, A6 $p \prec q \cdot q \prec r : \prec \cdot p \prec r$,

A3 $p \cdot \prec \cdot pp$, A7 $\sim \Diamond p \prec \sim p$,

A4 $p\,(qr) \cdot \prec \cdot q\,(pr)$, A8 $p \prec q \cdot \prec \cdot \sim\Diamond q \prec \sim\Diamond p$.

строится на основе схем аксиом

S1 » B1—B7,
S2 » B1—B8,
S3 » A1—A8,
S4 » B1—B7 и C10 $\sim\Diamond\sim p \prec \sim\Diamond\sim\Diamond\sim p$,
S5 » B1—B7 и C11 $\Diamond p \prec \sim\Diamond\sim\Diamond p$.

В качестве правил вывода берутся: 1) правило замены на эквивалентное (в смысле строгой эквивалентности); 2) $\dfrac{p, q}{pq}$ и 3) $\dfrac{p, p \prec q}{q}$. Предлагаются более компактные аксиоматизации S3 и S4. С этой целью рассматриваются следующие схемы аксиом:

H1 $p \prec (p \wedge p)$,
H2 $(p \wedge q) \prec q$,
H3 $[(r \wedge p) \wedge \sim (q \wedge r)] \prec (p \wedge \sim q)$,
H4 $\sim\Diamond p \rightarrow \sim q$,
H5 $p \prec \Diamond p$,
H6 $(p \prec q) \prec (\sim\Diamond q \prec \sim\Diamond p)$,
H7 $\Diamond\Diamond p \prec \Diamond p$,
H8 $\Diamond p \prec \sim\Diamond\sim\Diamond p$.

Знак $\wedge$ употребляется вместо $\cdot$; $p \rightarrow q$ по определению есть $\sim(p \wedge \sim q)$. В основу S3 кладут схемы аксиом H1—H6, в основу S4 H1—H7 и в основу S5 H1—H8. При этом используется одно правило вывода $\dfrac{p, p \rightarrow q}{q}$. Показывается, что построенные аксиоматики эквивалентны соответствующим аксиоматикам Льюиса. Устанавливается, что схемы аксиом H1—H7 независимы. Автор отмечает, что вопрос о независимости схем аксиом H1—H8 остается открытым. *С. В. Яблонский*

4324. Некоторые самодвойственные примитивные функции для исчисления высказываний. Роз (Some self-dual primitive funcions for propositional calculi. Rose Alan), Math. Ann., 1953, **126**, № 2, 144—148 (англ.)

Исследуется вопрос о построении специального вида примитивных (см. реф. 4322) для m-значного исчисления высказываний. Статья представляет

естественное продолжение работ автора по данному вопросу (Math. Ann., 1951, **123**, 76), где показывается, что система примитивных $1, 2, \ldots, m$ и условная дизъюнкция $[Y, X_1, X_2, \ldots, X_m, Y]$ функционально полна, причем перечисленные функции независимы (условная дизъюнкция $[Y, X_1, X_2, \ldots X_m, Y]$ определяется как функция с теми же значениями как и $(X_1 \& J_1(Y)) \vee \vee (X_2 \& J_2(Y)) \vee \ldots \vee (X_m \& J_m(Y))$, где $J_i(Y)$, $X \& Y$ и $X \vee Y$ соответствуют функции истинности $j_i(y) = \begin{cases} 1 \text{ при } y = i \\ m \text{ при } y \neq i \end{cases}$, $\max(x, y)$ и $\min(x, y)$).

При m четном вводится функция $\rightharpoonup \mathfrak{A}$, которой отвечает функция истинности $f(x)$, причем $f(1) = 2$, $f(m) = m - 1$, $f(2n) = 2n + 2 \left(n \neq \frac{1}{2} m\right)$ и $f(2n+1) = 2n - 1$ $(n \neq 0)$. При m нечетном вводятся функции $\mathfrak{A}^1$ и $\mathfrak{A}^2$, которые имеют соответственно функции истинности $g(x)$ и $h(x)$, определяемые так:

$$g\left(\frac{1}{2}(m+1)\right) = 1, \; g(x) = g(m+1-x) = x+1 \text{ при } x < \frac{1}{2} m,$$

$$h\left(\frac{1}{2}(m+1)\right) = m, \; h(x) = h(m+1-x) = x-1 \text{ при } x > \frac{1}{2} m + 1.$$

Устанавливаются следующие теоремы:

Теорема 1. Если m четно, то система, содержащая единственную самодвойственную примитивную $\langle Y, X_1, X_2, \ldots, X_m, Y\rangle$ с функцией истинности как у $\rightharpoonup [Y, X_1, X_2, \ldots, X_m, Y]$, функционально полна, и двойственная формула получается выписыванием переменных в символах $\langle Y, X_1, X_2, \ldots, X_m, Y\rangle$ в обратном порядке.

Теорема 2. Если m нечетное, то система, содержащая в качестве своих примитивных условную дизъюнкцию $^-_1$ и $^-_2$, функционально полна. Перечисленные примитивные образуют самодвойственное независимое множество. Двойственная формула может быть получена выписыванием переменных в символах $[Y, X_1, X_2, \ldots, X_m, Y]$ в обратном порядке и заменой $^-_1$ на $^-_2$ и $^-_2$ на $^-_1$.

Теорема 3. В системе Льюиса S2 и всех строгих исчислениях примитивные Льюиса могут быть заменены через самодвойственную примитивную функцию $\langle U, X, Z, Y, U\rangle$ с такими же значениями, как у $\sim [U, X, Z Y, U]$, и двойственная формула может быть получена выписыванием переменных в символах $[U, X, Z, Y, U]$ в обратном порядке (см. реф. 4322).

В доказательстве леммы 6 имеется опечатка: функцию $V_i(x)$ при $i > \frac{1}{2}(m+1)_{m+1-i}$ следует определять так: $V_i(x) =_{\text{df}} V_{1\,\frac{1}{2}(m+1)}(x)^2$ (показатель $m+1-i$ означает применение оператора $^-_2$ $m+1-i$ раз). *С. В. Яблонский*

4325. Аксиома выбора в «Новых основаниях математической логики» Куайна. Спеккер (The axiom of choice in Quine's New Foundations for mathematical logic. Specker Ernst P.), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1953, **39**, № 9, 972—975 (англ.)

Статья относится к аксиоматической теории множеств; в ней опровергается аксиома выбора для системы New Foundations (Новых Оснований), формулированной Куайном (Quine W. V., Amer. Math. Monthly, 1937, **44**, 70—80; см. реф. 4328 К). Автор получает противоречие, исходя из того следствия аксиомы выбора, что множество кардинальных чисел вполне упорядочено. Изложение опирается на книгу Россера (Rosser J. B., Logic for mathematicians, McGraw-Hill Book Company, New York, 1953).

Отмечается, что из результатов настоящей статьи вытекают следствия, касающиеся аксиомы бесконечности (она доказуема, поскольку для конечных множеств аксиома выбора доказуема) и континуум-гипотезы (обобщенная континуум-гипотеза формулируется как утверждение, что если m, 2^m и n — кардинальные числа, m не конечно и $m \leqslant n \leqslant 2^m$, то $m = n$ или $n = 2^m$; она опровержима, поскольку из нее следует аксиома выбора). Эти следствия будут рассмотрены в другой статье, которая должна появиться в J. Symbolic Logic.

Примечание референта. Доказательство неконструктивное и ведется средствами классической логики. *В. К. Детловс*

4326. Об ω-противоречивости и так называемой аксиоме бесконечности. Куайн (On ω-inconsistency and a so-called axiom of infinity. Quine W. V.), J. Simbolic Logic, 1953, **18**, № 2, 119—124 (англ.)

Автор рассматривает трудности, связанные с тем, что хотя для каждого натурального числа n формула $n \neq \Lambda$ выводима в его системе New Foundations (Новых Оснований) (см. реф. 4328 К), аксиома бесконечности в форме $\Lambda \notin \mathrm{Nn}$ (Nn — натуральный ряд, Λ — пустое множество), предложенной Россером, никем не была доказана и, возможно, опровержима. Если это так, то система NF ω-противоречива. Для уточнения относящихся к этому вопросу понятий автор напоминает следующие определения:

$$\hat{x} F x =_{\text{df}} (\iota y)\,(x)\,(x \in y \cdot \equiv F x),$$

$$\iota x = \hat{y}\,(y = x), \; V = \hat{x}\,(x = x), \; \Lambda = \hat{x}\,(x \neq \Lambda)$$

(здесь $\iota z F z$ означает «то z, для которого Fz»; часто для этой цели вместо ι употребляют знак $\imath$, но здесь, как видим, последний имеет другой смысл). 0 и оператор следования определяются методом Фреге:

$$0 = \iota_\Lambda, \; S x = \hat{y}\,(\exists z)\,(z \in y \cdot \hat{w}\,(w \in y \cdot w \neq z) \in x),$$

$$\mathrm{Nn} =_{\text{df}} \hat{x}\,(y)\,(0 \in y \cdot (z)\,(z \in y \cdot \supset \cdot S z \in y) \cdot \supset \cdot x \in y).$$

Согласно этому методу, натуральное число n есть множество всех множеств, состоящих из n элементов. Аксиому бесконечности естественно поэтому формулировать в виде $(x)\,(x \in \mathrm{Nn} \cdot \supset \cdot V \notin x)$, а эта формула, как легко доказывается, эквивалентна вышеуказанной $\Lambda \notin \mathrm{Nn}$.

Автор развивает соображения, в силу которых ω-противоречивость системы означает недостаток не всей системы в целом, а только принятого в системе определения понятия натурального числа. Именно (среди непротиворечивых) ω-противоречивыми являются те системы, в которых свойством, принятым за определение натурального числа, обладает, помимо каждого натурального числа, еще некоторый объект. В таких случаях возникает задача — заменить данное определение натурального числа таким, при котором указанное обстоятельство не имело бы места. Таким путем была бы устранена ω-противоречивость, но иногда это невозможно.

В таком случае автор рекомендует называть систему не «ω-противоречивой», а «численно неотделимой» (numerical insegregative). Вероятность того, что система NF обладает этим свойством, усиливается результатом Россера — Хао Вана, согласно которому, для системы NF не существует никакой стандартной модели (Rosser J. B., Hao Wang, J. Symbolic Logic, 1950, **15**, 113—129).

Примечание референта. Несуществование стандартной модели для NF еще не означает аналогичного обстоятельства для системы ML; то же относится к ω-противоречивости. (См. Rosser J. B., J. Symbolic Logic, 1952, **17**, 238—242.)

Что касается недоказуемости аксиомы бесконечности, то со времени написания реферируемой работы ситуация изменилась (см. реф. 4325).

А. С. Есенин-Вольпин

4327. О символизме математики и математической физики. Вейль (Über den Symbolismus der Mathematik und mathematischen Physik. Weyl Hermann), Studium generale, 1953, **6**, № 4, 219—228 (нем.)

Еще одно популярное изложение известной (см. Вейль Г., О философии математики, ГТТИ, М.—Л., 1934) идеалистической точки зрения Вейля, согласно которой: 1) математика, рассматриваемая сама по себе, трактуется, следуя интуиционизму Брауэра, т. е. ограничивается истинами, данными в интуиции, для которой бесконечность является лишь «открытым полем возможностей»; 2) в применении же к теоретическому естествознанию, где мы неизбежно встречаемся с вещами, недоступными наглядному созерцанию, математика рассматривается с точки зрения формализма Гильберта, оперирующего с «пустыми» символами.

С. А. Яновская

4328 к. Аксиоматические системы теории множества. Ван Хао, Мак-Нотон (Les systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles. Wang Hao, McNaughton Robert), 56 pp. Collect, logique math. Ser. A., 4, Gauthier-Villars, Paris, 1953 (франц.)

Небольшая книга, содержащая описание наиболее употребительных аксиоматических систем для теории множеств. Основной текст занимает стр. 9—35 (остальное—предисловия, библиография и указатель обозначений) и состоит из семи глав (первые шесть были переведены на французский язык Бромбергером). Содержание по главам таково: I. Кантор и теория множеств с наивной точки зрения. II. Теория типов. III. Теория множеств Цермело. IV. Теория множеств фон-Неймана-Бернайса. V. Система теории множеств Куайна. VI. Некоторые более слабые теории множеств. VII. Сила систем.

Теория множеств Цермело Z определяется следующим образом: имеется только один вид переменных $x, y, z, \ldots$ и один первоначальный предикат $\in$; формулы Z строятся из выражений вида $x \in y$ при помощи операций исчисления высказываний и кванторов; логическая база — исчисление предикатов первой ступени. Равенство вводится посредством определения: '$x = y$' означает '$(z)\cdot(z \in x \equiv z \in y)$'. Аксиомы:

Z1 (аксиома объемности).

$$x = y \supset (w)\,(x \in w \supset y \in w).$$

Z2 (аксиома соединения).

$$(Ew)\,(z)\,[z \in w \equiv (z = x \vee z = y)].$$

Z3 (аксиома выделения). Для любой формулы '$F(x)$', не содержащей 'y': $(z).(Ey).(x).[x \in y \equiv \equiv [x \in z \& F(x)]]$.

Z4 (аксиома множества подмножеств).

$$(z)\,(Ey)\,(x)\,[x \in y \equiv (w)\,[w \in x \supset w \in z]].$$

Z5 (аксиома суммы).

$$(z)\,(Ey)\,(x)\,[(x \in y \equiv (Ew).[x \in w \& w \in z]].$$

Z6 (аксиома выбора).

$$(x)\,[(y).(z).((y \in x \& z \in x) \supset [(Ew).w \in y \& \sim$$
$$\sim (Ew).(w \in y \& w \in z)]) . \supset (Eu).(y).(y \in x \supset (Ev).(t)\,[t = v \equiv (t \in u \& t \in y)])].$$

Z7 (аксиома бесконечности).

$$(Ez)\,[\Lambda \in z \& (x)\cdot(x \in z \supset \{x\} \in z)]$$

(Λ — пустое множество; $\{x\} = \{x, x\}$, а $\{x, y\}$ есть w из Z 2).

Z8 (аксиома ограничения (restriction) или фундирования).

Для любой формулы $F(x)$ из Z

$$(Ex)\,F(x) \supset (Ey)\,(F(y) \,\&\, (z) \sim [z \in y \& F(z)]).$$

Здесь Z 3 и Z 8 являются не аксиомами, а схемами аксиом, но авторы не вводят этого понятия, хотя и отмечают, что каждая из них охватывает бесконечно много частных случаев.

Из системы Цермело получается система Цермело-Френкеля ZF путем добавления следующей схемы, выражающей, что взаимно однозначный образ множества всегда есть множество.

ZF9 (аксиома подстановки). Для любой формулы $F(u, v)$ из ZF

$$(x)\,(y)\,(z)\,(w)\,([F(x, y) \,\&\, F(z, w)] \supset [(x = z) \equiv$$
$$\equiv (y = w)]) \supset [(Et)\,(u)\,(u \in t \equiv$$
$$\equiv (Ev)\,F(u, v)) \supset (Ew)\,(v)\,(v \in w \equiv (Eu)\,F(u, v))]$$

(ZF 1 — ZF 8 означает то же, что и Z 1 — Z 8 соответственно).

Система Нёймана в работе не приводится. Система Бернайса по существу известна советскому читателю из работы Гёделя «Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств» (Успехи матем. наук, 1948, **3**, 1 (23), 96—149, см. особенно сноску 3 на стр. 101); аксиома, о которой говорит Гёдель в *b*), есть $(A)\,(EB)\,(x, y, z)\,[\ll xy > z > \in B \equiv \equiv < xyz > \in A]$, но авторы в этом пункте придерживаются системы Гёделя.

Система Куайна известна под названием New Foundations (Новые Основания) и появилась в

Amer. Math. Monthly (1937, 44, 70—80). Формулы этой теории NF определяются также, как в теории Z или ZF, логическая база — попрежнему исчисление предикатов первой ступени; если исходить из прежнего определения равенства, то первая аксиома NF 1 — аксиома объемности — записывается также, как в Z и ZF. Помимо этой аксиомы, система Куайна содержит еще только одну схему аксиом — аксиом свертывания, для формулировки которой существенно следующее понятие.

Формула из NF называется выпрямимой, если каждой входящей в нее переменной можно приписать натуральное число таким образом, что при замене каждой переменной на соответствующее число каждая элементарная составная часть формулы вида $x \in y$ перейдет в выражение вида $n \in n+1$ (очень существенно, что это определение относится только к формулам, не содержащим никаких предикатных символов кроме $\in$, хотя и нетрудно указать изменения, которые придется внести в систему, если отказаться от этого условия). Схема аксиом свертывания NF 2 (авторы называют ее «L' axiome zigzag») гласит:

NF 2. Если '$F(x)$' — выпрямимая формула, не содержащая свободных вхождений 'y', то

$$(Ey)(x)[x \in y \equiv F(x)].$$

Помимо этой теории, которую авторы называют «La théorie en zigzag» (очевидно, заимствуя название из некоторых исследований, относящихся к условию выпрямимости), авторы рассматривают расширенную систему Куайна ML, введенную в книге последнего «Mathematical logic», New York, 1951. Формулы в этой системе строятся, как в системе Бернайса или уже упомянутой системе Гёделя (т. е. помимо переменных для множеств, обозначаемых малыми буквами, имеются еще обозначаемые большими буквами переменные для классов). Аксиомы суть:

ML 1. $(z)(z \in x \equiv z \in y) \supset (x \in Z \supset y \in Z)$.

ML 2 совпадает с NF 2, причем все переменные в '$F(x)$' из ML 2 должны обозначаться малыми буквами.

ML 3. Для любой формулы '$F(x)$' из ML, не содержащей 'y', $(EY)(x)[x \in Y \equiv F(x)]$.

В гл. VI рассматриваются следующие системы:

T_1 — система, получающаяся выкидыванием из Z аксиомы бесконечности Z 7; T_n при $n > 1$ есть система, в которой все переменные имеют индексы от 1 до n; элементарные формулы имеют вид $x_1 \in y_1$ или $x_i \in y_{i+1}$; определение тождества: '$x_1 = y_1$' для '$(z_1)(z_1 \in x_1 \equiv z_1 \in y_1)$', '$x_{i+1} = y_{i+1}$' для '$(z_i)(z_i \in x_{i+1} \equiv z_i \in y_{i+1})$'; аксиомы $T_n 1 - T_n 7$ получатся из Z 1 — Z 6 и Z 8 системы Z навешиванием индекса 1 на все переменные;

$T_n 8$ (аксиома объемности). Для каждого $i < n$

$$x_i = y_i \supset (w_{i+1})(x_i \in w_{i+1} \equiv y_i \in w_{i+1}).$$

$T_n 9$ (аксиома свертывания). Для каждого $i < n$ и каждой формулы '$F(x_i)$' из T_n, в которую 'y_{i+1}' не входит свободно, $(Ey_{i+1})(x_i)[x_i \in y_{i+1} \equiv F(x_i)]$ (содержательно: T_n — теория типов с n типами и множествами из T_1 в качестве индивидуумов).

Приводятся следующие результаты: Если ZF непротиворечива, то и система Бернайса непротиворечива (Novak, Fundam. math., 1950, 37, 87—110); авторы приводят доказательство Россера-Хао Вана (Rosser J. B., Hao Wang, J. Symbolic Logic, 1950, 15, 113—129); если NF непротиворечива, то и ML непротиворечива (Hao Wang, J. Symbolic Logic, 1950, 15, 25—32); при $n > 1$ в T_n определимо понятие истинности для T_{n-1} (Tarski A., J. Symbolic Logic, 1939, 4, 105—112). Несколько обобщая одно рассуждение Мостовского (Mostowski . A., Fundam. math., 1950, 37, 112), авторы устанавливают результат 7.3:

Если символизм L' содержит символизм L и непротиворечивость L' относительно L может быть доказана методом, которым для любого предложения p из L может быть доказана непротиворечивость L'^* относительно L^*, где L'^* и L^* получаются присоединением p к L' и L соответственно, то каждая теорема L', выразимая в L, доказуема в L. Отсюда вытекает, что каждая теорема системы Бернайса, выразимая в ZF, доказуема в ZF и аналогично для ML и NF.

I_n означает систему, которая отличается от T_n только тем, что в $T_n 9$ добавляется требование, чтобы $F(x)$ не содержала переменных типа выше, чем $i+1$. Авторы намечают доказательство того, что для любого n непротиворечивость I_n доказуема в T_3, а непротиворечивость I_ω (объединения всех систем I_n) в T_4 (McNaughton R., J. Symbolic Logic, 1953, 18, 136—144). В заключение авторы высказывают принцип, согласно которому принцип существования классов тем сильнее, чем более высокие типы связанных переменных допускаются в аксиоме свертывания, подтверждая его результатом Кемени (Kemeny J., Type Theory vs set theory, Dissertation, Princeton University, 1949): непротиворечивость теории типов может быть доказана в системе Цермело.

А. С. Есенин-Вольпин

4329 К. Введение в символическую логику. Лангер (An introduction to symbolic logic. Langer Susanne K., 2-nd ed., 367 pp., New. York, Dover Publications, 1953, 3.50 doll.)

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 11, 1051.

4330 К. Формализация как строгий эвристический прием. Формальные методы в аксиоматике. Фейс (La formalisation comme suggestion rigoureuse. Les methodes formelles en axiomatique Feys R. (Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, № 26, Paris, 1950), pp. 53—58, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1953)

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 11, 1052.

4331 К. Результаты критики Грисса интуиционистской логики применительно к дедуктивным теориям, формализованным в рамках интуиционистской логики. Гилмор (The effect of Griss, criticism of the intuitionistic logic on deductive theories formalized within the intuitionistic logic. Gilmore Paul Carl, II + 24 + I pp. (Dutch summary), Thesis, University of Amsterdam, 1953)

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 11, 1053.

4332 РЕЦ. О метаматематике алгебры. Робинсон (On the metamathematics of algebra. Robinson A., IX + 195 pp., ill., North. Holland Publisching Co, Amsterdam, 1951, 18fl.) [Рецензия: **Гудстейн** (Goodstein R. L.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 321, 224—226 (англ.)]

См. также: 4299, 4300, 4576, 4613, 4614.

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

4333. Аддитивная теория чисел. XI. Вальфиш А. З., Тр. Тбилисского матем. ин-та АН ГрузССР, 1953, **19**, 33—59 (русск.; резюме груз.)

Изучается функция $r_k(m, n)$, выражающая число решений системы уравнений

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 = n,$$
$$x_1 + \cdots + x_k = m$$

в целых числах при естественных предположениях, что $m \equiv n \pmod 2$ и $\Delta_k = kn - m^2 > 0$. Доказывается, что при $k \geqslant 8$, $n > 1$ имеет место оценка

$$r_k(m, n) = \pi^{\frac{k-1}{2}} k^{1-\frac{k}{2}} \Gamma^{-1}\left(\frac{k-1}{2}\right) \Delta_k^{\frac{k-3}{2}} \gamma_k(m, n) + B n^{\frac{k}{2}-2} \log n, \quad (1)$$

где $|B|$ не превосходит границы, зависящей только от k, а $\gamma_k(m, n)$ — сингулярный ряд сложной структуры. Доказательство (1) проводится с помощью индукции по k, исходя из уже известного случая $k = 8$. Для случая $k = 8$ (в этом случае $B = 0$) проводится ряд исследований, содержащих более простые доказательства известных ранее результатов. Результаты данной работы изложены в обзорной статье автора (Успехи матем. наук, 1952, **7**, № 6 (52), 97—178).

А. А. Киселев

4334. О числах n взаимно простых с $[\alpha n]$. Уотсон (On integers n relatively prime to $[\alpha n]$. Watson G. L.), Canad. J. Math., 1953, **5**, № 4, 451—455 (англ.)

Пусть $\varphi(m)$ обозначает число приведенных вычетов по модулю m, $[\xi]$ — наибольшее целое число $\leqslant \xi$ и $A(x, \alpha)$ обозначает число натуральных чисел $n \leqslant x$, для которых общий наибольший делитель $(n, [\alpha n]) = 1$. Доказывается существование предела

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x, \alpha)}{x} =$$
$$= \begin{cases} q^{-1} \sum\limits_{1\leqslant n<q} \varphi(n)\, n^{-1} \text{ для } \alpha = a/q,\ (a, q) = 1, \\ 6/\pi^2 \text{ для иррационального } \alpha. \end{cases}$$

Э. К. Фогелс

4335. Заметка о линейном симметрическом сравнении с n переменными. Морделл (Note on the linear symmetric congruence in n variables. Mordell L. J.), Canad. J. Math., 1953, **5**, № 4, 433—438 (англ.)

Рассматривается вопрос о числе N решений сравнения

$$f \equiv 0 \pmod p \quad (1)$$

в случае, когда f — линейная симметрическая функция от переменных вида

$$f = a_0 + a_1 \sum x_1 + a_2 \sum x_1 x_2 + \cdots + a_n x_1 x_2 \cdots x_n$$

и p — достаточно большое простое число.

Высказывается предположение, что

$$N = p^{n-1} + O\left(p^{\frac{1}{2}(n-1)}\right), \quad (2)$$

если только сравнение (1) не выводится из сравнения $x_1 x_2 \ldots x_n \equiv a$ посредством линейной подстановки

$$x_r' \equiv (Ax_r + B)/(Cx_r + D) \quad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

и не выводится из какого-нибудь сравнения

$$a x_1 x_2 \ldots x_n + b \sum x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \equiv 0,$$
$$\sum x_1 x_2 \ldots x_{n-2} \equiv 0, \ \sum x_1 x_2 \ldots x_{n-3} \equiv 0, \ldots$$
$$\ldots, \sum x_1 x_2 \equiv 0$$

посредством линейной подстановки

$$x_r' \equiv A x_r + B \quad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Это предположение доказывается для $n = 2, 3, 4$. Для $n = 2, 3$ доказательство тривиально. Для $n = 4$ доказательство основывается на элементарных фактах теории квадратичных вычетов и на одном результате Г. Хассе о числе решений сравнения

$$y^2 \equiv ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \pmod p$$

(Хассе Г., Лекции по теории чисел, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1953, гл. II, § 10).

Оценка (2) для случая

$$f = a_1 x_1^{l_1} + \cdots + a_n x_n^{l_n} + a,$$

когда

$$a_1 a_2 \ldots a_n a \not\equiv 0 \pmod p,$$

была получена автором еще в 1932 г. на основе теоремы А. Вейля о нулях Z-функций (Mordell L. J., Math. Z., 1933, **37**, 193—209).

Б. М. Бредихин

4336. О количестве примитивных точек решетки в параллелограмме. Эстерман (On the number of primitive lattice points in a parallelogram. Estermann Theodor), Canad. J. Math., 1953, **5**, № 4, 456—459 (англ.)

Пусть α — вещественное иррациональное число, а u и a — любые положительные числа. Обозначим через $g(u, a)$ количество всех целых точек (x, y) (x, y — целые числа) в параллелограмме

$$0 < x \leqslant u, \ \alpha x - a < y \leqslant \alpha x; \quad (1)$$

$g(u, a)$ зависит и от α, хотя это и не отражено в обозначении; обозначим через $f(u, a)$ количество примитивных точек в параллелограмме (1) (т. е. точек (x, y), x и y — целые, $(x, y) = 1$). Доказывается, что

$$\lim_{u\to\infty} \{u^{-1} f(u, a)\} = 6\pi^{-2} a. \qquad (2)$$

В случае $a = 1$ результат принадлежит Уотсону (см. реф. 4334).

Доказательство основывается на известной формуле

$$\lim_{u\to\infty} \{u^{-1} g(u, a)\} = a \qquad (3)$$

(для которой дается простое доказательство) и на легко получаемом равенстве

$$u^{-1} f(u, a) = \sum_d \mu(d)\, d^{-1} (u/d)^{-1} g(u/d,\ a/d). \qquad (4)$$

Основная часть заметки посвящена обоснованию возможности предельного перехода под знаком суммы, после чего (2) непосредственно следует из (4) и (3). *А. В. Малышев*

4337. Некоторые приложения геометрии Лобачевского к теории бинарных квадратичных форм. Линник Ю. В., Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 6, 973—974

Используя методы работы Ю. В. Линника и А. В. Малышева (РЖМат, 1953, 39), интерпретируя плоскость Лобачевского на гиперболоиде $x^2 - y^2 - z^2 = D > 0$ и изображая на последнем точками $\left(\frac{c+a}{2}, \frac{c-a}{2}, b\right)$ квадратичные формы $a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2$ с целыми коэффициентами и $b^2 - ac = -D$, автор получил следующие результаты относительно распределения квадратичных форм.

Пусть $\mathfrak{A}$ — треугольная область на гиперболоиде, определяемая неравенствами $|2y| \leqslant x - z \leqslant x + z$ (приведенные формы попадают внутрь или на границу $\mathfrak{A}$), Q_0 — неевклидов круг радиуса K_0, определяемый неравенствами $\sqrt{D} \leqslant x \leqslant \sqrt{D}\operatorname{ch} K_0$, $\mathfrak{A}_0$ — пересечение $\mathfrak{A} \cap Q_0$; $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}_0$; $q \geqslant 3$ — простое число с условием $(-D/q) = +1$.

Теорема 1. При $D > D_0(K_0, q)$ количества приведенных форм в областях $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_1$, $H(\mathfrak{A}_0)$ и $H(\mathfrak{A}_1)$ удовлетворяют неравенствам: $H(\mathfrak{A}_0) > c_1(K_0, q)\, h(-D)$, $H(\mathfrak{A}_1) > c_2(K_0, q)\, h(-D)$, где c_1 и c_2 — константы и $h(-D)$ — полное число классов форм.

Следствие. При любой константе K и $D > D_0(K, q)$ существуют приведенные формы (a, b, c) под условием $a < \sqrt{D}/K$ в количестве $> c(K, q)\, h(-D)$.

Теорема 2. Пусть внутри круга Q_0 задана область S, содержащая внутри себя круг Лобачевского радиуса $\lambda > 0$, где λ — сколь угодно малая фиксированная константа. Тогда при $D > D_0(\lambda, q, K_0)$ количество $H(S)$ приведенных форм (a, b, c), отвечающих внутренности этой области, удовлетворяет неравенству $H(S) > c(\lambda, q_0, K_0)\, h(-D)$.

Следствие 1. Среди $h(-D)$ приведенных форм (a, b, c) существуют формы под условиями $\alpha_1\sqrt{D} < a < \alpha_2\sqrt{D}$, $\alpha_3\sqrt{D} < b < \alpha_4\sqrt{D}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ — любые константы, совместимые с условиями приведенности. Это выполняется при $D > D_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_4, q, K_0)$ и количество соответствующих форм будет $> c(\alpha_1, \ldots, \alpha_4, q, K_0)\, h(-D)$.

Следствие 2. Сравнения $b^2 \equiv -D \pmod a$, рассматриваемые при указанных выше условиях для a и b, имеют $> c(\alpha_1, \ldots, \alpha_4, q, K_0)\, h(-D)$ решений.

Аналогичные теоремы получены автором также для форм, принадлежащих подгруппам группы классов чисто коренных форм с фундаментальным дискриминантом $-D$. Доказательства не приведены. *Д. С. Горшков*

4338. Представление натурального числа суммой чисел Фибоначчи. Леккеркеркер (Voorstelling van natuurlijke getallen door een som van getallen van Fibonacci. Lekkerkerker C. G.), Simon Stevin, 1951/52, 29, № 4, 190—195 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (голл.)

Рассматривается вопрос о представлении целого числа N в виде суммы членов известного ряда Фибоначчи:

$$N = \sum_{\nu=1}^{k} u_{i_\nu},$$

где $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Доказывается единственность подобного разложения при определенном понимании вопроса.

Затем автор устанавливает понятие о «ранге» числа N, понимая под этим число $r = r(N)$ такое, что

$$u_r \leqslant N < u_{r+1}.$$

В дальнейшем изучается асимптотическое поведение некоторой функции $\psi(r)$, связанной со средним чисел данного ранга r (при $r \to \infty$). *А. И. Попов*

4339. Представление квадрата в виде суммы семи квадратов. Сандем (A square as the sum of 7 squares. Sandham H. F.), Quart. J. Math., 1953, **4**, № 15, 230—236 (англ.)

Пусть $r_s(n)$ равно числу представлений натурального числа n в виде суммы s квадратов целых чисел. Доказывается формула

$$r_7(m^2) = 14 \sum_{\substack{\delta/m \\ \delta \text{ нечетное}}} (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} \mu(\delta) \left\{\sigma_5\left(\frac{m}{\delta}\right) + 8\sigma_5\left(\frac{m}{2\delta}\right)\right\} \delta^2,$$

где $\sigma_5(n) = \sum_{d/n} d^5$, если n — натуральное число, и $\sigma_5(n) = 0$ в противном случае, а $\mu(n)$ — функция Мёбиуса. Доказательство основано на элементарном преобразовании некоторых тождеств, получаемых из теории эллиптических функций, и является распространением метода, примененного Гурвицем при выводе формул для $r_3(m^2)$ и $r_5(m^2)$ (Hurwitz A., Math. Werke, B. **11**, Basel, 1933, 751—755). *А. А. Киселев*

4340. О некоторых сравнениях Вандивера. Карлиц (Some congruences of Vandiver. Carlitz L.), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 4, 707—712 (англ.)

Автор занимается обобщением одного класса сравнений, содержащих числа Бернулли или Эйлера; типичным представителем подобных сравнений можно считать следующий простейший пример:

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^s\binom{r}{s}\frac{B_{m+(r-s)(p-1)}}{m+(r-s)(p-1)}\times$$

$$\times\frac{B_{n+s(p-1)}}{n+s(p-1)}\equiv 0\pmod{p^r};$$

m и n не делятся на $p-1$; $m>r$, $n>r$. Общий случай, указанный Вандивером, гораздо сложнее; автор производит дальнейшее обобщение и прилагает полученный результат к установлению сравнений, содержащих коэффициенты разложений в степенные ряды эллиптических функций Якоби.
А. И. Попов

4341. Сравнения для чисел Эйлера. Карлиц, Риордан (Congruences for Eulerian numbers. Carlitz L., Riordan J.), Duke Math. J., 1953, 20, № 3, 339—343 (англ.)

Изучаемые в работе целые числа $A_{k,s}$ определяются соотношениями

$$\frac{1-x}{e^t-x}=\sum_{k=0}^{\infty}H_k(x)\frac{t^k}{k!},\quad x\neq 1,$$

$$(x-1)^k H_k(x)=\sum_{s=1}^{k}A_{k,s}\,x^{s-1},\quad k>0.$$

Пусть p — простое число. Доказывается, что при фиксированном s, $p^{j-1}<s\leqslant p^j$, вычеты чисел $A_{k,s}$ по модулю p^e при $k\geqslant e$ имеют период $p^{j+e-1}(p-1)$. Эта теорема распространяется и на некоторые системы чисел, аналогичные числам $A_{k,s}$.
А. А. Киселев

4342. Сравнения Куммера и производная Шура. Карлиц (Kummer congruences and the Schur derivative. Carlitz L.), Amer. J. Math., 1953, 75, № 4, 699—706 (англ.)

Пусть p — простое число, $\{a_m\}$ — последовательность рациональных чисел, целых по модулю p, удовлетворяющих сравнению Куммера

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}C_s^r a_p^{r-s}a_{m+s(p-1)}\equiv 0\pmod{p^r}$$

для $m\geqslant r\geqslant 1$. Доказывается, что числа

$$\Delta a_{p^m}=(a_{p^{m+1}}-a_p^{p^m}a_{p^m})/p^{m+1},$$

$$\Delta^r a_{p^m}=(\Delta^{r-1}a_{p^{m+1}}-a_p^{p^{m+r-1}}\Delta^{r-1}a_{p^m})/p^{m+1}$$

являются целыми при $1\leqslant r\leqslant p-1$, вычисляются их вычеты (mod p^m) и формулируется более общая теорема. Результат применяется для коэффициентов разложения $\mathrm{sn}\,x$ и других эллиптических функций Якоби и также для многочленов Эйлера. Подобные вопросы о производных Шура

$$\Delta a_m=(a_{m+1}-a_m)/p^{m+1},\quad \Delta^r a_m=\Delta(\Delta^{r-1}a_m)$$

исследовали тот же автор (РЖМат, 1954, 3217), Шур (Schur I., Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1933, № 3—4, 145—151) и др.
Э. К. Фогелс

4343. Приложения некоторых основных тождеств. Карлиц (Applications of some basic identities. Carlitz L.), Quart. J. Math., 1953, 4, № 15, 173—177 (англ.)

В известных тождествах

$$\prod_{r=1}^{m-1}(1+q^r x)=\sum_{r=0}^{m-1}\begin{bmatrix}m-1\\ r\end{bmatrix}q^{\frac{1}{2}r(r+1)}x^r$$

и

$$\prod_{r=1}^{m}(1-q^{2r-1})=\sum_{s=0}^{2m}(-1)^s\begin{bmatrix}2m\\ s\end{bmatrix},$$

где

$$\begin{bmatrix}m\\ s\end{bmatrix}=\frac{(1-q^m)\ldots(1-q^{m-s+1})}{(1-q)\ldots(1-q^s)},\quad\begin{bmatrix}m\\ 0\end{bmatrix}=1,$$

автор полагает q равным первообразному корню степени n из единицы и получает формулы, пригодные как в поле комплексных чисел, так и в конечном поле $GF(p^t)$, где $p^t\equiv 1\pmod{n}$. Например,

$$\sum_{r=0}^{2m}\left(\frac{(1+\alpha)\ldots(1+\alpha^r)}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^r)}\right)^2=(-1)^m,$$

где α — первообразный корень степени $(4m+2)$ из единицы.
А. А. Киселев

4344. Заметка о некоторых формулах из теории разбиения чисел на слагаемые. Карлиц (Note on some partition formulae. Carlitz L.), Quart. J. Math., 1953, 4, № 15, 168—172 (англ.)

Доказывается ряд формул, содержащих функции $p_k(m)$, которые определяются с помощью тождества

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{-k}=\sum_{m=0}^{\infty}p_k(m)\,x^m.$$

Например,

$$\sum_{m=0}^{\infty}p_3(3m+2)\,x^m=9\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x^{3n})^9}{(1-x^n)^{12}},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}p_{-4}(2m)\,x^m=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x^{2n})^{10}}{(1-x^n)^2(1-x^{4n})^4},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}p_{-5}(5m)\,x^m\sum_{m=0}^{\infty}p(5m+4)\,x^m=5\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{5n})^4.$$

Доказательства основаны на известной формуле

$$\wp'(u)=-\frac{\sigma(2u)}{\sigma^4(u)}$$

и на разложении в ряд Фурье функций $\wp(u)$ и $\sigma(u)$.
А. А. Киселев

4345. Разложение целого числа на сумму двух квадратов. Санелевич (Descompunerea unui nu-

măr întreg într'o sumă de două pătrate. Sanielevici S.), Bul. Ştiinţ. Acad. R. P. Române, Sec. mat. şi fiz., 1953, 5, № 1, 5—18 (рум.; резюме русск., франц.)

Автор исследует известный вопрос арифметики о разложении целого числа на сумму двух квадратов, применяя, между прочим, симметрические непрерывные дроби таким же образом, как это делал в своё время С. Смит (Венков Б. А., Элементарная теория чисел, М.—Л., 1937, 55—56). *А. И. Попов*

4346. Целочисленные решения уравнений первой степени (диофантовы уравнения). Шуранъи (Elsőfokú egyenletek egész megoldása (Diofantoszi egyenletek). Surányi János), Középiskolai mat. lapok, 1953, 7, № 3—4, 65—81 (венг.)

Подробное рассмотрение, преимущественно на частных примерах, решения в целых числах неопределенных уравнений первой степени с 2—4 неизвестными. Изложение снабжено соответствующими геометрическими пояснениями и рассчитано на учащихся средней школы. *А. И. Попов*

4347. Применение теоретико-числовых оценок при вычислениях. Эмерслебен (Anwendungen zahlentheoretischer Abschätzungen bei numerischen Rechnungen. Emersleben O.), Z. angew Math. und Mech., 1953, **33**, № 8—9, 265—268 (нем.)

Кратко излагаются соображения и результаты, содержащиеся в других работах автора (РЖМат, 1953, 1049; 1954, 3719).

Подробно проводится вычисление постоянной

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n r_3(n)\, n^{-\frac{3}{2}} = -3{,}238625\ldots,$$

где $r_3(n)$ — число разложений n на три квадрата. При этом погрешность вычислений оценивается с помощью неравенства $r_3(n) \leqslant 6n$, верного для всех $n > 0$. *А. А. Киселев*

4348. Задача о решетке (Математическая заметка). Ньюбери (A lattice problem (Mathematical note). Newbery E. V.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 321, 205—206 (англ.)

Область покрыта сетью радиостанций, расположенных по вершинам треугольной решетки (треугольники равносторонние). Необходимо распределить между этими станциями возможно меньшее число N несущих частот так, чтобы расстояния между соседними станциями, работающими на одной частоте, были не меньше заданного.

В заметке простым геометрическим рассуждением устанавливается, что искомыми (в зависимости от заданного минимума расстояния) являются только числа 3, 4, 7, 9, 13,... Все они получаются по формуле $N = m^2 + mn + n^2$, где m, n — любые целые числа. *Д. С. Горшков*

4349. Об интерференции серий импульсов. Миллер, Шварц (On the interference of pulse trains. Miller K. S., Schwarz R. J.), J. Appl. Phys., 1953, **24**, № 8, 1032—1036 (англ.)

Рассматриваются совместно две периодические серии импульсов прямоугольной формы, p_1 и p_2 — продолжительности импульсов, T_1 и T_2 — периоды этих серий (соответственно), s — исходная фаза, т. е. время, которым отделены начальные импульсы обеих серий.

Решается задача: какую часть f (в среднем) достаточно большого промежутка времени импульсы частично или полностью перекрываются? Различаются следующие случаи: (a) исходная фаза задана, (b) исходная фаза случайна (все ее значения равновероятны), (c) исходная фаза задана, но учитываются только те перекрывания импульсов, которые имеют индивидуальную длительность, не меньшую чем u, (d) то же самое, что и (c), но исходная фаза случайна.

Авторы предполагают, что $p_1 = \mu p$, $p_2 = \nu p$, $T_1 = mp$, $T_2 = np$, $s = rp$, $u = \alpha p$ (μ, ν, m, n, r, α — целые числа, p — очень малый интервал времени), и получают решения применением теории сравнений. Для (a) и (d) решения таковы: (a) $f = \sum_{i=1}^{\nu} \varphi_i / M$, где M — общее наименьшее кратное чисел m и n, φ_i — число разрешимых сравнений $mx \equiv r + i - 1 - j\ (n)$, $j = 0, 1, \ldots, \mu - 1$; (d) $f = (\mu\nu - \alpha^2 + \alpha) / mn = (p_1 p_2 - u^2 + pu) / T_1 T_2$.

В случае несоизмеримости исходных данных решения для (b) и (d) получаются предельным переходом $p \to 0$.

Кратко указано, как аналогичным образом может быть рассмотрена задача с большим числом серий. *Д. С. Горшков*

4350 К. Простые числа. Борель (Les nombres premiers. Borel Émile, 133, pp. Presses Universitaires de France, Paris, 1953) (франц.)

Излагаются некоторые вопросы классической теории чисел, в первую очередь теории простых чисел. Книга состоит из введения, шести глав и двух приложений.

Введение. Делимость чисел. Глава 1. Определение и элементарные свойства простых чисел. Глава 2. Таблицы простых чисел. Глава 3. Сравнения и квадратичные вычеты. Глава 4. Теоремы Ферма и Вильсона. Глава 5. Суммы квадратов. Глава 6. Целые мнимые числа. Приложение 1. Целые делители полиномов. Приложение 2. Закон разрежения простых чисел.

Книга рассчитана на широкие круги читателей. В большей части ее предполагается у читателей лишь знание элементарной арифметики и алгебры. Дается много численных примеров. Приводятся интересные статистические данные, иллюстрирующие закономерности распределения простых чисел в натуральном ряду (глава 2, приложение 2). *И. П. Кубилюс*

4351 РЖ. О магических квадратах и линейных задачах на числовой решетке. Шне (Ueber magische Quadrate und lineare Gitterpunktsprobleme. Schnee Walter, Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Math. naturwiss. Klasse Bd. 98, Heft 1, 47 pp., Akademie — Verlag, Berlin, 1951, 4,65 DM) [**Рецензия: Вен** (Veen S. C. van), Simon Stevin, 1951/52, **29**, № 4, 230—231 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (голл.)]

Краткая характеристика содержания брошюры В. Шне; рецензент высоко оценивает результаты

работы, содержащей много нового, несмотря на элементарный характер изложения.

4352 **РЕЦ. Открытие чисел. Изучение чисел. Исследование чисел. Понимание чисел. Брюкнер, Мертон, Гросникл** (Discovering Numbers, 346 pp.; Learning numbers, 346 pp.; Exploring numbers, 376 pp.; Understanding numbers, 378 pp.,; Brueckner Leo J., Merton Elda L., Grossnickle Foster E., John C. Winston Co., Chicago, Ill., 1952) [**Рецензия: Пик** (Peak Philip), School Sci. and Math., 1953, **53**, № 6, 499—500 (англ.)]

Положительный отзыв о четырех книгах, посвященных вопросам элементарной арифметики.

И. Г. Мельников

См. также: 4456

АЛГЕБРА

4353 **РЕЦ. Элементы математики. Кн. 2. Алгебра. Бурбаки** (Éléments de mathématique. Book II, Algebra. Chaps. I — VII. Bourbaki N., Actualités Scientifiques et Industrielles, nos. 934, 1032, 1044, 1102, 1179, Hermann, Paris, 1942, 1947, 1948, 1950, 1952) [**Рецензия: Артин** (Artin E.), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 5, 474—479 (англ.)]

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

4354 **РЕЦ. Лекции по абстрактной алгебре. Джейкобсон** (Lectures in abstract algebra Vol. II. Linear algebra. Jacobson N., 12 + 280 pp., Van Nostrand, New York, 1953, 5.85 doll.) [**Рецензия: Дьёдонне** (Dieudonné J.), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 5, 480—483 (англ.)]

4355 **РЕЦ. Векторное исчисление. Т. I. Алгебра. Линейная алгебра, приложения. Шатлен** (Calcul vectoriel. Tome I. Algèbre. Algèbre linéaire, application. Chatelun Lucien, VIII + 605 pp., Gauthier Villars, Paris, 1952, 5000 fr.) [**Рецензия: Ратерфорд** (Rutherford D. E.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 321, 229—230 (англ.)]

4356 **РЕЦ. Линейная алгебра и теория матриц. Столл** (Linear algebra and matrix theory. Stoll R., XV + 272 pp., Mc Graw Hill, New York and London, 1952, 48 s.) [**Рецензия: Точер** (Tocher K. D.), J. Roy. Statist. Soc., 1953, **116**, Part 4, ser. A, 457—459 (англ.)]

4357 **РЕЦ. О некоторых свойствах характеристических значений квадратных матриц. Пароди** (Sur quelques proprietés des valeurs caractéristiques des matrices carrées. Parodi M., Mémorial des Sciences Mathématiques, № 118, 64 pp., Gauthier Villars, Paris, 1952, 800 fr.) [**Рецензия: Тауски** (Taussky O.), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 5, 464 (англ.)]

ГРУППЫ

4358. **Об одном специальном виде двойственности в теории групп. I. Фукс, Кертес, Селе** (On a special kind of duality in group theory. I. Fuchs L., Kertész A., Szele T.), Acta math., Acad. sci. hung., 1953, **4**, № 1—2, 169—178 (англ.)

Абелеву группу G авторы называют S — F-двойственной абелевой группе H, если для всякой подгруппы G существует изоморфная ей фактор-группа группы H и каждая фактор-группа группы H изоморфна хотя бы одной подгруппе группы G. Дается полное описание класса счетных двойственных себе абелевых групп:

Среди групп без кручения таких групп нет. Счетная p-группа двойственна себе тогда и только тогда, когда она либо ограничена (т. е. порядки ее элементов в совокупности ограничены), либо разложима в прямую сумму неограниченной редуцированной p-группы и бесконечного числа групп типа p^∞. Периодическая группа двойственна себе тогда и только тогда, когда двойственна себе каждая ее примарная компонента. Смешанная счетная группа конечного ранга тогда и только тогда двойственна себе, когда она разложима в прямую сумму конечного числа бесконечных циклических подгрупп и периодической группы, всякая примарная компонента которой является неограниченной и, следовательно, отличной от нуля, двойственной себе p-группой. Смешанная счетная группа бесконечного ранга тогда и только тогда двойственна себе, когда она разложима в прямую сумму какой-нибудь подгруппы и бесконечного числа групп, изоморфных группе Z, где Z — прямая сумма аддитивной группы R всех рациональных чисел, бесконечной циклической группы и фактор-группы группы R по подгруппе целых рациональных чисел.

В работе дано также полное описание класса пар S — F -двойственных между собой счетных абелевых групп и класса пар счетных абелевых групп, одна из которых S — F-двойственна другой.

Л. Я. Куликов

4359. **Индуцированные представления локально компактных групп. II. Теорема взаимности Фробениуса. Макки** (Induced representations of locally compact groups. II. The Frobenius reciprocity theorem. Mackey George W.), Ann. Math., 1953, **58**, № 2, 193—221 (англ.)

В предыдущей работе (Mackey G., Ann. Math., 1952, **55**, 101—139) автор обобщил на локально компактные группы известное для конечных групп понятие индуцированного представления (см., например, Вейль А., Интегрирование в топологических группах, Изд-во иностр. лит-ры, 1950, § 23). В той же работе он дал частичное обобщение теоремы взаимности Фробениуса, утверждающей, что представление U^L группы $\mathfrak{G}$, индуцированное неприводимым представлением L подгруппы G, столько раз содержит неприводи-

мое представление M группы $\mathfrak{G}$, сколько раз соответствующее M представление $(M)_G$ подгруппы G содержит L. Однако это обобщение касалось только конечномерных дискретных компонент представления. Маутнер (Mautner F. J., Amer. J. Math., 1952, **74**, 737—758) рассмотрел случай, когда G компактна, но представления $\mathfrak{G}$ имеют непрерывные разложения.

В реферируемой работе содержится обобщение теоремы Фробениуса на случай, когда регулярные представления групп G и $\mathfrak{G}$ имеют тип 1 (РЖМат, 1954, 1709), а также на случай, когда регулярное представление группы G дискретно разлагается на представления типа 1 (второй случай содержит теорему Маутнера). Точнее, доказано, что если регулярные представления групп $\mathfrak{G}$ и G имеют тип 1 и если $^{\mathfrak{G}}R \simeq \int\limits_{\mathfrak{M}_2} N^y\, d\eta\,(y)$, $^{G}R = \int\limits_{\mathfrak{M}_1} F^x\, d\zeta\,(x)$ — канонические разложения правых регулярных представлений групп $\mathfrak{G}$ и G на фактор-представления, причем N^y (соответственно F^x) является кратным неприводимого представления M^y (соответственно L^x), то

$$\int\limits_{\mathfrak{M}_1} (\overline{L}^x \times U^{L^x})\, d\zeta\,(x) \simeq \int\limits_{\mathfrak{M}_2} ((\overline{M}^y)_G \times M^y)\, d\eta\,(y).$$

При этом обе части равенства эквивалентны представлению V подгруппы $G \times \mathfrak{G}$ группы $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$, соответствующему представлению группы $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$, индуцированному единичным представлением диагональной подгруппы $\tilde{\mathfrak{G}}$. Далее, если $\zeta\,(\mathfrak{M}_1) = \eta\,(\mathfrak{M}_2)$, то существуют борелевская мера α в $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ и α-измеримая функция $n\,(x, y)$ на $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$, принимающая целочисленные значения и значение ∞ такие, что: 1) для всех борелевских подмножеств $E \subset \mathfrak{M}_1$ и $E' \subset \mathfrak{M}_2$ имеем $\alpha\,(E \times \mathfrak{M}_2) = \zeta\,(E)$, $\alpha\,(\mathfrak{M}_1 \times E') = \eta\,(E')$ и 2) $U^{L^x} \simeq \int\limits_{\mathfrak{M}_2} n(x,y) \times M^y\, d\beta_x\,(y)$ почти для всех x из $\mathfrak{M}_1$, $(M^y)_G \simeq \int\limits_{\mathfrak{M}_1} n\,(x, y)\, L^x\, d\gamma_y\,(x)$ почти для всех y из $\mathfrak{M}_2$ (по мерам ζ и η соответственно). Здесь β_x — соответствующая α мера в однородном пространстве, возникающем при отображении $r\,(x, y) = x$; γ_y — то же для отображения $r\,(x, y) = y$; представление $(M^y)_G$ порождается на G представлением M^y.

Аналогичные результаты справедливы, если $\mathfrak{G}$ имеет регулярное представление любого типа, но представление G дискретно разлагается на представления типа 1.

Даны приложения к теории представлений группы Лоренца; указано обобщение, аналогичное обобщению Осима (Osima M., Math. J. Okayama Univ., 1952, **1**, 33—61), теоремы Фробениуса для конечных групп; поставлен ряд еще нерешенных вопросов. Кроме того, работа содержит изложение теории кратности для представлений групп и новое изложение теории непрерывных прямых сумм представлений. *Н. Я. Виленкин*

4360 Д. О вещественных примитивных группах Ли. Мушиц Н. П. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанский ун-т, Казань, 1954

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

4361. Арифметическая теория колец типа Дедекинда. II. Жаффар (Théorie arithmétique des anneaux du type de Dedekind. II. Jaffard Paul), Bull. Soc. math. France, 1953, **81**, № 1, 41—61 (франц.)

Реферируемая статья является продолжением предыдущей работы автора с таким же названием (Bull. Soc. math. France, 1952, **80**, 61—100). Коммутативное кольцо с единицей называется кольцом типа Дедекинда, если в нем каждый идеал $\mathfrak{a}$ может быть представлен в виде конечного произведения $\mathfrak{a} = \Pi \mathfrak{a}_\mu$, где $\mathfrak{a}_\mu$ содержится в единственном максимальном идеале $\mathfrak{p}_\mu$. Оказывается, что такое разложение единственно, если соответствующие максимальные идеалы попарно различны; $\mathfrak{a}_\mu$ называется компонентой $\mathfrak{a}$, соответствующей $\mathfrak{p}_\mu$.

Пусть $\mathfrak{D}$—кольцо типа Дедекинда, являющееся мультипликационным кольцом (область целостности, в которой все целые и дробные идеалы с конечным базисом образуют группу по умножению); K — поле отношений $\mathfrak{D}$; $(\mathfrak{p}_\mu)$ — совокупность всех максимальных идеалов $\mathfrak{D}$. Каждое μ сопоставляется с нормированием v_μ поля K с упорядоченной абелевой группой G_μ в качестве группы значений. Если $\mathfrak{a}$ — идеал $\mathfrak{D}$ (целый или дробный), то $v_\mu(\mathfrak{a})$ есть верхний класс группы G_μ (ограниченная снизу совокупность элементов G_μ, которая вместе с x содержит и $y > x$), при этом $v_\mu(\mathfrak{a}) \neq G_\mu^+$ только для конечного числа μ. Если (A_μ) есть совокупность верхних классов групп G_μ, причем $A_\mu \neq G_\mu^+$ только для конечного числа μ, то существует единственный идеал $\mathfrak{a}$ такой, что $v_\mu(\mathfrak{a}) = A_\mu$. Далее, $v_\mu(\mathfrak{ab}) = v_\mu(\mathfrak{a}) + v_\mu(\mathfrak{b})$. Этим установлен изоморфизм между мультипликативной системой идеалов кольца $\mathfrak{D}$ и аддитивной системой совокупностей верхних классов (A_μ).

Изучение арифметики идеалов кольца $\mathfrak{D}$ сводится, таким образом, к изучению строения верхних классов в произвольной упорядоченной абелевой группе G и их арифметических свойств. Для каждого верхнего класса A группы G существует максимальная изолированная подгруппа H такая, что $A + H \subset A$. Пусть φ — естественный гомоморфизм G на $\Gamma = G / H$; $\overline{\Gamma}$ — упорядоченная группа, являющаяся пополнением упорядоченной группы Γ как топологической группы. Верхний класс A может быть определен одним из следующих двух способов: 1) $x \in A$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) \geqslant a$, где $a \in \Gamma$; в этом случае A называется квазизамкнутым; 2) $x \in A$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) > a$, где $a \in \overline{\Gamma}$. Знание строения верхних классов группы G позволяет установить ряд их арифметических свойств, применяемых затем к изучению идеалов $\mathfrak{D}$.

Каждый простой идеал $\mathfrak{D}$ содержится в единственном максимальном. Совокупность $(\mathfrak{p}_\alpha)$ всех

простых идеалов кольца $\mathfrak{O}$, содержащихся в данном $\mathfrak{p}_\mu$, находится в естественном взаимно однозначном соответствии с совокупностью (H_α) изолированных подгрупп группы G_μ. Индекс α называется характеристическим индексом компоненты $\mathfrak{a}_\mu$ идеала $\mathfrak{a}$, если верхнему классу $v_\mu(\mathfrak{a}) = v_\mu(\mathfrak{a}_\mu)$ соответствует изолированная подгруппа H_α указанным выше способом. Компонента $\mathfrak{a}_\mu$ называется квазизамкнутой, если $v_\mu(\mathfrak{a})$ есть квазизамкнутый верхний класс. $\mathfrak{b} : \mathfrak{a}$ обозначает идеал, состоящий из $x \in K$ таких, что $\mathfrak{a}x \subset \mathfrak{b}$; $\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{O} : \mathfrak{a}$; $\mathfrak{a}$ называется делящимся на $\mathfrak{b}$, если существует идеал $\mathfrak{i}$ такой, что $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{i}$.

1. Идеал $\mathfrak{a}$ делится на $\mathfrak{b}$ тогда и только тогда, когда: а) $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} \subset \mathfrak{b}\mathfrak{b}^{-1}$, б) если компоненты $\mathfrak{a}_\mu$ и $\mathfrak{b}_\mu$ имеют одинаковый характеристический индекс, то при квазизамкнутости $\mathfrak{a}_\mu$ компонента $\mathfrak{b}_\mu$ тоже квазизамкнута.

2. Чтобы уравнение $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{i}$ (относительно $\mathfrak{i}$) при любом $\mathfrak{b}$ имело конечное число решений, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}$ было равно либо $\mathfrak{O}$, либо произведению максимальных идеалов. Решение будет единственным при любом $\mathfrak{b}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{O}$.

3. Для каждого идеала $\mathfrak{a}$ существует максимальная группа идеалов, содержащая $\mathfrak{a}$. Она состоит из тех $\mathfrak{b}$, для которых $\mathfrak{b}_\mu$ (при любом μ) имеет тот же характеристический индекс, что и $\mathfrak{a}_\mu$, и $\mathfrak{b}_\mu$ квазизамкнуто тогда и только тогда, когда квазизамкнуто $\mathfrak{a}_\mu$. *З. И. Боревич*

4362. О локально ограниченных телах. Флейшер (Sur les corps localement bornés. Fleischere Isidore), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 11, 546—548 (франц.)

Пусть K — тело, в котором задана топология τ, удовлетворяющая аксиоме отделимости, недискретная и совместимая с алгебраическими операциями сложения и умножения. Топология τ называется локально ограниченной, если существуют множества, одновременно открытые и ограниченные. Подмножество P в K называется почти порядком, если 0, 1 и $-1 \in P$, $PP \subset P$, $P + P \subset zP$ и каждый элемент из K является отношением двух элементов из P. Если для каждого a найдется такое b, что $aP \subset Pb$ и $Pa \subset bP$, то P определяет в K локально ограниченную топологию τ, при которой P является ограниченной окрестностью. Каждая локально ограниченная топология может быть введена таким образом.

С помощью почти порядка P можно ввести почти оценки в K, пробегающие упорядоченную направленную группу Γ (автор не дает точного определения понятия почти оценки, но указывает, что оно обобщает понятия оценки и полуоценки для полей). Локально ограниченная топология τ' называется менее тонкой, чем τ, если $P \subset cP'$. Если не существует топологий, менее тонких, чем τ, то τ называется минимальной топологией. Если K — топологическое локально ограниченное тело с минимальной топологией и если группа коммутаторов C мультипликативной группы тела K образует ограниченное множество, то существует оценка в K, значения которой принадлежат абелевой группе и которая индуцирует в K его топологию. *Н. Я. Виленкин*

4363. Модули над операторными алгебрами. Каплански (Modules over operator algebras. Kaplansky Irving), Amer. J. Math. 1953, **75**, № 4, 839—858 (англ.)

В ряде своих статей автор переносит некоторые понятия и результаты из теории колец операторов гильбертова пространства, созданной работами Д. Неймана и Мэррея и И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка, на более общие абстрактно алгебраические образования. При этом главное внимание уделяется выяснению алгебраической природы соответствующих фактов. Реферируемая работа существенно использует определения и результаты предыдущих работ автора (Ann. Math., 1951, **53**, 235—249; 1952, **56**, 460—472).

Алгебра A называется C^*-алгеброй, если она является банаховой *-алгеброй (нормированным кольцом с инволюцией), причем $\|x^*x\| = \|x\|^2$ и $x^*x + 1$ имеет обратный. Изучается A-модуль H над коммутативной C^*-алгеброй A с единицей. Элементы из $A(a, b, \ldots)$ записываются слева от элементов из $H(x, y, \ldots)$. В H определено внутреннее произведение (x, y) со значениями в A, удовлетворяющее условиям: 1) $(x, y) = (y, x)^*$, 2) $(x, x) \geqslant 0$, $(x, x) = 0$ только для $x = 0$, 3) $(ax + x_1, y) = a(x, y) + (x_1, y)$. Вводятся две нормы: $|x| = (x, x)^{1/2}$ и $\|x\| = \|(x, x)\|^{1/2}$. Относительно нормы $\|x\|$ H является нормированным линейным пространством. Внутреннее произведение и произведение ax непрерывны по обоим аргументам; H можно пополнить с сохранением всех аксиом. Если H уже полно, то оно называется C^*-модулем над A. Получается обобщение гильбертова пространства. Ограниченными операторами называются линейные непрерывные отображения, являющиеся гомоморфизмами модуля. Множество B всех ограниченных операторов на H образуют банахову алгебру с обычной нормой. C^*-алгебра называется AW^*-алгеброй, если: а) в частично упорядоченном множестве проекций (т. е. самосопряженных идемпотентов) любое множество ортогональных проекций имеет точную верхнюю грань (т. в. г.); б) каждая максимальная коммутативная самосопряженная подалгебра порождается своими проекциями.

Пусть A — коммутативная AW^*-алгебра; C^*-модуль H называется AW^*-модулем, если удовлетворяются дополнительные требования: а) пусть $\{e_i\}$ — ортогональные проекции в A с т. в. г. e и x — такой элемент из H, что $e_i x = 0$ для всех i, тогда $ex = 0$; б) пусть $\{e_i\}$ — ортогональные проекции в A с т. в. г. 1 и пусть $\{x_i\}$ — ограниченное подмножество в H. Тогда существует в H (единственный) элемент x, для которого $e_i x = e_i x_i$ при всех i.

Аннулятор в A любого подмножества из AW^*-модуля H (в частности, и самого H) есть прямое слагаемое в A. H называется правильным, если его аннулятор есть 0. Не уменьшая общности, можно ограничиться правильными AW^*-модулями. Множество $\{x_\lambda\}$ называется ортонормированным, если $|x_\lambda| = 1$ для каждого λ и $(x_\lambda, x_\mu) = 0$ при $\lambda \neq \mu$. Всегда существует максимальная ортонормированная система. Ортонормированная система называется ортонормированным базисом, если ее ортогональное дополнение состоит только из нуля.

AW^*-модуль называется однородным, если он допускает ортонормированный базис, и $\aleph$-однородным, если допускает ортонормированный базис из $\aleph$ элементов.

Теорема 1. Пусть H — правильный AW^*-модуль над A. Тогда в A существует множество ортогональных проекций $\{e_i\}$ с т. в. г. 1, такое, что все e_iH однородные AW^*-модули над e_iA.

Теорема 2. Для любой коммутативной AW^*-алгебры A и кардинального числа $\aleph$ существует $\aleph$-однородный AW^*-модуль над A.

Теорема 3. Пусть H — AW^*-модуль, T — AW^*-подмодуль, T' — его ортогональное дополнение. Тогда $H = T \oplus T'$.

Теорема 4. Пусть A — коммутативная AW^*-алгебра. Тогда любые два $\aleph$-однородные AW^*-модуля над A изоморфны.

Обычным путем определяется функционал на H со значениями в A. Если x — элемент AW^*-модуля H, то функция $y \to (y, x)$ есть функционал с нормой $\| x \|$.

Теорема 5. Пусть H — AW^*-модуль, f — непрерывный функционал на H. Тогда существует (единственный) элемент $x \in H$ такой, что $f(y) = (y, x)$ для всех $y \in H$.

Оператор T^* называется сопряженным T, если $(x\,T, y) = (x, y\,T^*)$.

Теорема 6. Пусть H — AW^*-модуль и T — его гомоморфизм в себя. T непрерывен тогда и только тогда, когда он имеет сопряженный.

Непосредственно получается, что множество всех ограниченных операторов на H является C^*-алгеброй. Проекция E ($E = E^2 = E^*$) алгебры B ограниченных операторов AW^*-модуля H называется абелевой, если EBE коммутативно. Алгебра имеет тип I, если каждое прямое слагаемое имеет абелеву проекцию,

Теорема 7. Пусть A — коммутативная AW^*-алгебра, H — правильный AW^*-модуль над A, B — алгебра ограниченных операторов на H. Тогда B есть AW^*-алгебра типа I с центром, изоморфным A. Если H $\aleph$-однородно, то и B обладает этим свойством.

Теорема 8. Пусть B есть AW^*-алгебра типа I и e — абелева проекция в B, не аннулируемая никаким отличным от нуля центральным элементом (такое e всегда существует в AW^*-алгебре типа I). Тогда eB является правильным AW^*-модулем над eBe, и если B рассматривать как алгебру правых мультипликаторов модуля eB, то мы получим так все ограниченные операторы eB.

Отсюда получается следствие:

Пусть даны коммутативная AW^*-алгебра A и кардинальное число $\aleph$. Тогда существует единственная с точностью до *-изоморфизма $\aleph$-однородная AW^*-алгебра типа I с центром, изоморфным A.

Опираясь на полученную характеристику AW^*-алгебр типа I, автор переходит к изучению дифференцирований и автоморфизмов таких алгебр.

Теорема 9. Каждое дифференцирование AW^*-алгебры типа I является внутренним.

Теорема 10. Пусть B является AW^*-алгеброй типа I. Тогда любой автоморфизм B, оставляющий центр неподвижным, является внутренним.

Раньше аналогичный факт был установлен только для *-автоморфизмов. В заключение автор ставит вопрос: не будет ли всякое дифференцирование C^*-алгебры непрерывным? *Б. И. Плоткин*

4364. Структура совокупности величин классической механики и квантовой механики. Фалькенбергер (Die Struktur des Größenbereiches von klassischer Mechanik und Quantenmechanik. Falk Gottfried), Z. Physik, 1953, **135**, № 4, 431—472 (нем.)

Изучается алгебраическая структура совокупности величин как для случая классической механики, так и для случая нерелятивистской и релятивистской квантовой механики. Основная идея состоит в том, что алгебраическая структура такой совокупности величин описывается при помощи системы аксиом и переход от одной механики к другой совершается путем изменения одной или нескольких из этих аксиом. Статья состоит из пяти параграфов.

В § 1 дано краткое изложение теории замкнутых механических систем, опубликованной ранее автором (Z. Physik, 1951, **130**, 51—68; 1952, **131**, 269—272; Math. Ann., 1951, **123**, 379—391). Классическая теория Гамильтона — Якоби излагается в терминах абстрактной алгебры. Для этого вводится коммутативное кольцо F_k формальных степенных рядов, порожденных действительными числами и переменными x_i, p_i, $i = 1,2,\ldots,n$; в F_k предполагаются определенными «скобки» $[f, g]$, удовлетворяющие аксиомам

$$\left.\begin{gathered}[f, g] = -[g, f],\ [f, g_1 + g_2] = [f, g_1] + [f, g_2],\\ [f, \alpha g] = \alpha [f, g],\\ [f, g_1 \cdot g_2] = [f, g_1]\, g_2 + g_1 [f, g_2],\end{gathered}\right\} \quad (1)$$

$$[x_i, x_k] = 0,\ [p_i, p_k] = 0,\ [p_i, x_k] = \delta_{ik},\quad i, k = 1,2,\ldots,n \quad (2)$$

Каждая механическая система определяется некоторым элементом $H \in F_k$ (его функцией Гамильтона); изменение механической системы, т. е. функции $x_i(t)$, $p_i(t)$, определяется по начальному состоянию $x_i(0) = x_i$, $p_i(0) = p_i$ формулами

$$x_i(t) = e^{t[H,\ldots]} x_i,\ p_i(t) = e^{t[H,\ldots]} p_i, \quad (3)$$

где вообще

$$e^{t[H,\ldots]} f = f + \frac{t}{1!}[H, f] + \frac{t^2}{2!}[H, [H, f]] + \ldots$$

При этом обычная теория Гамильтона — Якоби трактуется как нормировка (Bewertung) кольца F_k.

Далее автор переходит к гейзенбергову кольцу, для построения которого сначала рассматривается свободное кольцо F некоммутативных многочленов с образующими x_i, p_i, $i = 1,2,\ldots,n$, над телом K действительных чисел; общее гейзенбергово кольцо определяется при этом как кольцо $F_H = F/R_H$ вычетов по минимальному двустороннему идеалу R_H, содержащему все элементы (x_i, x_l), (p_i, p_l), (p_i, x_l), $i \neq l$, $(p_i, x_i) - (p_l, x_l)$, $i, l = 1, 2,\ldots, n$, где вообще $(f, g) = fg - gf$ и потому

$$(x_i, x_l) = 0,\ (p_i, p_l) = 0,\ (p_i, x_l) = k\delta_{il},\ i, l = 1,2,\ldots,n.$$

В этом кольце существует автоморфизм $f \to f^+$ такой, что

$$(f + g)^+ = f^+ + g^+,\ (fg)^+ = g^+ f^+,\ x_i^+ = x_i,$$

$$p_i^+ = p_i,\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Собственное гейзенбергово кольцо автор определяет как гомоморфный образ кольца F_H, в котором k переходит в чисто мнимое число.

Квантовая механика трактуется как механика в гейзенберговом кольце F_H, расширенном при помощи степенных рядов. Каждая механическая система снова определяется элементом $H \in F_H$, но теперь ее закон движения определяется формулами

$$x_i(t) = e^{(t/k)H} x_i e^{-(t/k)H},$$
$$p_i(t) = e^{(t/k)H} p_i e^{-(t/k)H}, \qquad (3a)$$

где

$$e^{(t/k)H} = 1 + \frac{1}{1!}(t/k)H + \frac{1}{2!}(t/k)^2H^2 + \ldots$$

Переход к шредингеровой форме уравнений движения осуществляется путем применения перестановочных с H элементов к некоторому левому идеалу в F_H.

В § 2 теория переносится на случай незамкнутых систем. Сначала излагается классический метод, состоящий в рассмотрении канонической системы

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{\partial R}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial R}{\partial x_i}, \quad i = 0,1,\ldots,n,$$

$$x_0 = t, \; R = p_0 + H(x_1,\ldots,x_n, p_1,\ldots,p_n; x_0),$$

где H — функция Гамильтона системы, затем этот метод описывается аксиоматически, путем введения кольца F'_R формальных степенных рядов от $x_0, x_1,\ldots,x_n, p_0, p_1,\ldots,p_n$. При этом остается в силе закон движения (3), если только H заменить на R и считать, что $i = 0,1,\ldots,n$. Аналогично, в квантовой механике перенесение теории получается путем введения гейзенбергова кольца F'_H, определенного соотношениями $(x_j, x_l)=0$, $(p_j, p_l)=0$, $(p_j, x_l) = k\delta_{jl}$, где k — чисто мнимое число $\hbar/i$.

В § 3 дается алгебраическая трактовка квантовой механики с учетом спина. После изложения известной наивной классической схемы вращающегося твердого тела автор указывает на возможность описания спина путем введения дополнительных переменных ξ_i, π_i $(i = 1, 2, 3)$ и функций $s_1 = \xi_3\pi_2 - \xi_2\pi_3$, $s_2 = \xi_1\pi_3 - \xi_3\pi_1$, $s_3 = \xi_2\pi_1 - \xi_1\pi_2$ этих переменных. Тогда

$$[s_1, s_2] = s_3, \; [s_2, s_3] = s_1, \; [s_3, s_1] = s_2, \qquad (4)$$

где $[f, g]$ — скобки Пуассона. Аксиоматическое описание этой картины получается путем введения коммутативного кольца $\mathfrak{S}_K$ формальных степенных рядов от x_i, p_i, s_i $(i = 1, 2, 3)$ над полем K действительных чисел с определяющими соотношениями (4) и

$$[x_i, x_k]=[p_i, p_k]=[x_i, s_k]=[p_i, s_k]=0,$$
$$[p_i, x_k]=\delta_{ik}. \qquad (2a)$$

Переход к квантовой механике осуществляется посредством введения колец Паули. Автор называет кольцами Паули простые кольца над K с некоммутирующими образующими x_i, p_i, s_i $(i = 1,2,3,)$, в которых определены скобки, удовлетворяющие аксиомам (1), (2a) и (4). Из этих аксиом вытекают соотношения $(g, h) = k[g, h] = [g, h]k$, где k — элемент кольца, перестановочный со всеми другими элементами кольца. Показывается, что аксиомы (1), (2a) и (4) равносильны условиям

$$\left.\begin{array}{l} (x_i, x_l) = (x_i, s_l) = (p_i, p_l) = (p_i, s_l) = 0, \\ (p_i, x_l) = k\delta_{il}, \\ (s_i, s_j) = ks_l, \; i, j, l \text{ — циклическая перестановка чисел } 1, 2, 3. \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Кольцо $\mathfrak{S}$ с определяющими соотношениями (5) не является простым; его гомоморфизмы, сохраняющие свойства (1), (2a), (4), порождаются некоторыми идеалами, называемыми K-идеалами. Оказывается, что всякий K-идеал в $\mathfrak{S}$ порождается некоторым K-идеалом в подкольце $\mathfrak{S}$ с образующими s_1, s_2, s_3, k. Автор ограничивается случаем K-идеала в $\mathfrak{S}$, порожденного элементом $s_1^2 + k^2/4$; применение к этому случаю общего закона (3a) в шредингеровой форме приводит к уравнениям Паули для частиц со спином $\hbar/2$.

§ 4 посвящен релятивистской механике, причем автор ограничивается специальным принципом относительности. После изложения основных уравнений классической релятивистской механики в канонической форме строится аксиоматическая теория. Основным здесь является коммутативное кольцо формальных степенных рядов над K с образующими $x^i, p_i, i = 0, 1, 2, 3$, в котором определены скобки, удовлетворяющие (1) и

$$[x^i, x^k] = 0, \; [p_i, p_k] = 0, \; [p_i, x^k] = \delta_i^k. \qquad (2')$$
$$i, k = 0, \ldots, 3.$$

Закон движения задается формулами

$$x^i(\tau') = e^{\tau'[R^2,\ldots]} x^i, \; p_i(\tau') = e^{\tau'[R^2,\ldots]} p_i, \qquad (3')$$
$$i = 0, \ldots, 3,$$

где R^2 — масса покоя: $R^2 = c^2 \sum_{i,k} g^{ik}\left(p_i - \frac{e}{c}\varphi_i\right) \times \left(p_k - \frac{e}{c}\varphi_k\right)$, φ_i — четырехмерный потенциал, $g_{ik} = 0$ при $i \neq k$, $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$, c — скорость света в пустоте, e — заряд частицы.

Переход к релятивистской квантовой механике осуществляется путем построения релятивистского гейзенбергова кольца, в котором наиболее существенными являются соотношения

$$(x^i, x^l) = 0, \; (p_i, p_l) = 0, \; (p_i, x^l) = k\delta_i^l.$$

При этом проблема элементарных частиц трактуется как некоторая проблема о собственных значениях, в представлении Шредингера — проблема о собственных значениях оператора массы покоя

$$R^2 = c^2 \sum_{i,k} g^{ik}\left(k\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{e}{c}\varphi_i\right)\left(k\frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{e}{c}\varphi_k\right).$$

Собственные функции этого оператора, отвечающие точкам дискретного спектра, определяют состояния, которые и называются элементарными частицами.

В § 5 дано изложение релятивистской теории спина. При этом существенную роль играет кольцо

$\mathfrak{W}_R$ с некоммутативными образующими x^i, p_i, s_{ij} и определяющими соотношениями

$$\left.\begin{array}{l}(x^i, x^j) = (p_i, p_j) = (x^i, s_{jl}) = (p_i, s_{jl}) = 0,\\ (p_i, x^j) = k\delta_i^j,\ (s_{ij}, s_{jn}) = -ks_{in},\ j = 1, 2, 3,\\ (s_{i0}, s_{0n}) = ks_{in},\ (s_{ij}, s_{ln}) = 0,\\ \text{если } i, j, l, n \text{ различны.}\end{array}\right\} \quad (6)$$

Для идеалов этого кольца имеет место предложение, аналогичное сформированному выше предложению для кольца $\mathfrak{W}$. Однако оказывается, что в этом случае не имеет смысла рассматривать простые гомоморфные образцы кольца $\mathfrak{W}_R$, а простоту следует заменить другим, более слабым условием; причиной этого является существование антиавтоморфизма $f \to f^+$ в $\mathfrak{W}_R$, при котором $(x^i)^+ = x^i$, $p_i^+ = p_i$, $s_{ij}^+ = s_{ij}$. Автор далее подробно рассматривает идеал, порожденный элементом $s_{23}^2 + h^2/4$, и соответствующий гомоморфизм и, исходя из сформулированных им выше общих принципов, приходит к теории, эквивалентной теории Дирака.

В добавлениях приводятся доказательства алгебраических предложений, сформулированных в основном тексте без доказательства.

М. А. Наймарк

4365. Замечания об основах теории структур. II. Эллис (Notes on the foundations of lattice theory. II. Ellis David), Arch. Math., 1953, **4**, № 4, 257—260 (англ.)

Определенная на структуре L функция от двух переменных $f(a, b)$ со значениями в произвольном множестве S называется c-функцией, если $f(a, b) = f(a \cap b, a \cup b)$ для всех $a, b \in L$. Приводятся примеры c-функций:

1. L — произвольная структура, в которой определена однозначная операция $a * b$, удовлетворяющая условию $a * b = (a \cap b) * (a \cup b)$.

2. Структурно-упорядоченная абелева группа (l-группа) является частным случаем примера 1.

3. Булева алгебра, в которой $a * b$ есть симметрическая разность $a + b = (a \cap b') \cup (a' \cap b)$, также является частным случаем примера 1 (через a' обозначено дополнение a).

Примеры 1, 2, 3 дают частичное решение проблемы 105 Биркгофа (Биркгоф Г., Теория структур, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1952, 227).

4. L — нормированная структура и $f(a, b)$ — либо $|a| + |b|$, либо $\delta(a, b)$ (расстояние в L).

5. Интервал $[0,1]$, в котором $a * b$ есть сумма $a + b \pmod 1$.

Доказывается, что

1. Структура L дистрибутивна тогда и только тогда, когда существует c-функция $f(a, b)$, осуществляющая в L при фиксированном a взаимно однозначное отображение $b \to f(a, b)$.

2. Структура L дедекиндова тогда и только тогда, когда существует такая c-функция $f(a, b)$, что из $f(a, b) = f(a, c)$ и $b \neq c$ следует $b \| c$ (b и c несравнимы).

Если для оценки $g(x, y)$, заданной на структуре $L \times L$, существует такая оценка $g(x)$, заданная на L, что $g(x, y) = g(x) + g(y)$, то оценка $g(x, y)$ называется квадратной. c-функция $f(a, b)$ на L с действительными значениями называется симметричной относительно суммы, если $f(a, b) + f(c, d) = f(a, c) + f(b, d)$. Квадратная оценка на $L \times L$ является симметричной относительно суммы c-функцией на L.

Пусть B — булева алгебра, являющаяся группой относительно операции $a * b$ (см. пример 1); $a * b$ есть симметрическая разность $a + b$ тогда и только тогда, когда $a' = 1 * a$ для всех $a \in B$.

А. Х. Лившиц

4366. Абстрактная теория соотношений нормальности. Бенадо (Teoria abstractă a relaţiilor de normalitate. Benado Mihail), Studii şi cercetări mat., 1953, **4**, № 1—2, 69—120 (рум.; резюме русск., франц.)

В произвольном частично упорядоченном множестве $\mathscr{P}$ вводится бинарное соотношение нормальности aNb (b нормально в a), причем из aNb следует $a \geqslant b$. Конечный ряд $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_{r-1} \geqslant a_r$ называется нормальным, если $a_{i-1} N a_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Если $\Omega \in \mathscr{P}$, $x \in \mathscr{P}$ и существует конечный нормальный ряд, началом которого является Ω, а концом x, то Ω называется нормально и конечно достижимым от x и обозначается $\Omega \mathfrak{M} x$.

В произвольной структуре S рассматривается соотношение нормальности N. Фиксируется произвольный элемент $\Omega_0 \in S$, при этом предполагается, что $\Omega_0 N \Omega_0$.

Соотношение N называется нормальностью $\mathfrak{B}$, если выполняются следующие аксиомы (условия Узкова):

I. Если $\Omega \leqslant \Omega_0$, $a \leqslant \Omega$, $b \leqslant \Omega$, $\Omega_0 \mathfrak{M} \Omega$, $\Omega N a$, $\Omega N b$, то

$$\mathrm{I}_1.\ \Omega N (a \cup b)$$

$$\mathrm{I}_2.\ bN(a \cap b),\ aN(a \cap b).$$

II. Если $\Omega \leqslant \Omega_0$, $a \leqslant \Omega$, $b \leqslant \Omega$, $\Omega_0 \mathfrak{M} \Omega$, $\Omega N a$, $\Omega N b$ и если $b \geqslant p' \geqslant a \cap b$, bNp', то

$$\mathrm{II}_1.\ \chi\varphi(p') = p'$$

$$\mathrm{II}_2.\ \varphi(b) N \varphi(p'),$$

здесь $\varphi(p') = a \cup p'$ для $p' \in b \mid a \cap b$; $\chi(p) = b \cap p$. для $p \in a \cup b \mid a$.

Формулируется гипотеза SZ: два нормальных ряда с общими концами $\Omega \geqslant \omega$ ($\Omega \leqslant \Omega_0$, $\Omega_0 \mathfrak{M} \Omega$) преобразуются уплотнениями Цассенхауза в два ряда, тоже нормальные и такие, что сопряженные частные являются непосредственно подобными промежуточному частному, присоединенному к ним.

Аксиома $\mathfrak{B}$: если $\Omega \leqslant \Omega_0$, $a \leqslant \Omega$, $b \leqslant \Omega$, где $\Omega_0 \mathfrak{M} \Omega$, $\Omega N a$, $\Omega N b$, то существует, по крайней мере, один такой элемент ω, что $\omega \leqslant a \cap b$ и $aN\omega$, $bN\omega$.

Доказывается, что гипотеза SZ + аксиома $\mathfrak{B}$ равносильны условиям Узкова I + II, а также теореме Шрейера—Цассенхауза для $\mathfrak{B}$-нормальных конечных рядов. Далее рассматриваются нормальности α, β, $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_{\alpha+\beta}$, $\mathfrak{B}_\beta^0$, относительно которых доказываются следующие утверждения:

1. Для того чтобы нормальность α была нормальностью $\mathfrak{B}$, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла аксиомам I_1 и II_2; нормальность α является тогда нормальностью $\mathfrak{B}_{\alpha+\beta}$.

2. Для того чтобы нормальность β была нормальностью $\mathfrak{B}$, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла аксиомам I_2 и II_1: нормальность β является тогда нормальностью $\mathfrak{B}_\beta$.

3. Если нормальность β удовлетворяет аксиоме $\mathfrak{B}$, то необходимым и достаточным условием для выполнения аксиомы I_2 Узкова является выполнение в структуре следующей гипотезы S (Шрейера): два нормальных ряда с общими концами $\Omega \geqslant \omega$, где $\Omega \leqslant \Omega_0$, $\Omega_0 \mathfrak{M} \Omega$, преобразуются уплотнениями Цассенхауза в два, также нормальных, ряда.

4. Теорема Шрейера для $\mathfrak{B}^0_\beta$-нормальных рядов.

Кроме того, доказывается, что гипотеза S + + аксиома $\mathfrak{B}$ равносильны аксиомам $I_1 + I_2 + \tilde{\Pi}$, где $\tilde{\Pi}$ есть следующая аксиома: если $\Omega \leqslant \Omega_0$, $a \leqslant \Omega$, $b \leqslant \Omega$, где $\Omega_0 \mathfrak{M} \Omega$, $\Omega N a$, $\Omega N b$, и если $b \geqslant p_1' \geqslant p_2' \geqslant a \cap b$, где $b \mathfrak{M} p_1'$ и $p_1' N p_2'$, то $\varphi(p_1') N \varphi(p_2')$.

Гипотеза Z (Цассенхауза): два нормальных ряда с общими концами $\Omega \geqslant \omega$, где $\Omega \leqslant \Omega_0$, $\Omega_0 \mathfrak{M} \Omega$, преобразуются уплотнениями Цассенхауза в два ряда, сопряженные частные которых непосредственно подобны снизу присоединенному к ним промежуточному частному.

При одновременном выполнении гипотезы Z и аксиомы $\mathfrak{B}$ имеет место следующее утверждение:

D. Если $a \leqslant \Omega_0$, $y \leqslant x \leqslant \Omega_0$, где $\Omega_0 N a$, $\Omega_0 \mathfrak{M} x$ и $x N y$, то $x \cap (a \cup y) = (x \cap a) \cup y$. Отсюда следует, что в случае выполнения аксиомы I_2 Узкова гипотеза Z и условие D равносильны. *А. Х. Лившиц*

4367 Д. О некоторых классах линейных алгебр Ли. Залманович З. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. гос. пед. ин-т, М., 1954

См. также: 4335, 4419 К, 4535, 4548, 4566, 4574, 4579—4581, 4585, 4586, 4613

ТОПОЛОГИЯ

4368. Разложение локально связного компакта в прямое произведение кривой и многообразия. Борсук (On the decomposition of a locally connected compactum into cartesian product of a curve and a manifold. Borsuk K.), Fundam. math., 1953, 40, 140—159 (англ.)

Исследуется однозначность разложения пространства в прямое произведение. Автор пользуется понятиями гомотопической и изотопической деформаций. Гомотопической деформацией пространства X называется непрерывное отображение f прямого произведения $X \times I$ (где I — единичный отрезок $0 \leqslant t \leqslant 1$) в X, причем $f(x, 0) = x$ для любого $x \in X$; если, кроме того, для каждого $t_0 \in I$ отображение $x \to f(x, t_0)$ является гомеоморфизмом пространства X в себя, то f называется изотопической деформацией в X. Точка $p \in X$ называется изотопически свободной, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует в X изотопическая деформация f, освобождающая точку p и удовлетворяющая условию $\rho(f(x, t), x) < \varepsilon$ для всех значений x, t. Через $\alpha(X)$ обозначается множество евклидовых точек пространства X, т. е. точек, имеющих окрестность, гомеоморфную евклидову пространству; через $\beta(X)$ обозначается множество точек, имеющих окрестность, гомеоморфную евклидову полупространству. Если C — локально связная кривая, а M — многообразие, то множество изотопически свободных точек произведения $C \times M$ совпадает с $C \times \beta(M) \cup \beta(C) \times M$. Автор вводит также понятие почти евклидовой точки пространства X, т. е. такой точки p, что для любого $\varepsilon > 0$ существует гомотопическая деформация f пространства X, удовлетворяющая условиям: $\rho(f(x, t), x) < \varepsilon$ для всех значений x, t; $p \in \alpha(f(X, 1))$ и $\dim_p f(X, 1) = \dim_p X$. Почти евклидовыми точками локально связной кривой C являются такие точки индекса 2 в C, в которых кривая C локально стягиваема.

Основным результатом работы является следующая теорема:

Пусть X_1 и X_2 — локально связные кривые, а M — многообразие (с границей или без нее). Для того чтобы прямые произведения $X_1 \times Y$ и $X_2 \times Y$ были гомеоморфны, необходимо и достаточно, чтобы были гомеоморфны кривые X_1 и X_2. Из этого, далее, следует, что локально связный компакт можно не более чем одним способом разложить в прямое произведение $X_0 \times X_1 \times \ldots \ldots \times X_k$, где $\dim X_0 \leqslant 1$, а каждый из множителей X_i, $i = 1, \ldots, k$ является простой дугой или простой замкнутой кривой. *J. W. Jaworowski*

4369. О свойстве Янишевского топологических пространств. Гжегорцик, Куратовский (On Janiszewski's property of topological spaces. Grzegorczyk A., Kuratowski C.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1952, 25, 169—182 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Авторы называют свойством Янишевского следующее свойство топологического пространства: если F_0 и F_1 — два связных замкнутых множества этого пространства и дополнение к множеству $F_0 \cup F_1$ связно, то множество $F_0 \cap F_1$ также связно. Через 1 обозначается нормальное локально связное пространство со свойством Янишевского. Указаны следующие теоремы:

Теорема 1. Если F_0 и F_1 — два таких замкнутых множества пространства 1, что множество $1 \setminus (F_0 \cup F_1)$ связно, и S_0, S_1 — какие-либо компоненты множеств F_0, F_1 соответственно, то множество $S_0 \cap S_1$ связно.

Теорема 2. Если G_0 и G_1 — связные открытые множества пространства 1 и $1\setminus(G_0\cup G_1)$ связно, то и множество $G_0\cap G_1$ связно.

Теорема 3. Если G_0 и G_1 — два таких открытых множества пространства 1, что $1\setminus(G_0\cup G_1)$ связно, и S_0, S_1 — какие-либо компоненты множеств G_0, G_1 соответственно, то множество $S_0\cap S_1$ связно.

Авторы ставят следующую проблему: обладает ли свойством Янишевского нормальное локально связное пространство, для которого справедливо утверждение теоремы 3.

Доказательства приведенных теорем вытекают из свойств

$$A\subset\overline{A},\ \overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B},$$
$$\overline{\overline{A}}=\overline{A},\ \overline{0}=0,$$

операции замыкания без использования предложения о замкнутости точки, если прибавить дополнительные требования о нормальности, связности и локальной связности пространства и предположить, кроме того, что всякое открытое множество пространства 1 есть сумма связных замкнутых множеств. *А. С. Пархоменко*

4370. Концы и простые концы. Фрёйденталь (Enden und Primenden. Freudenthal H.), Fundam. math., 1952, **39**, 189—210 (журнал. вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Пусть R — метрическое пространство со счетной базой. Замкнутое множество F автор называет мостом (Brücke) между открытыми множествами G и H, если сумму $F\cup G\cup H$ нельзя разбить на два открытых в $F\cup G\cup H$ непересекающихся множества $G'\supseteq G$ и $H'\supseteq H$. Вводится отношение $G\perp H$, которое означает, что для любой убывающей последовательности мостов F_i между G и H множество $\bigcap F_i\setminus G\setminus H$ не пусто. Далее, $\perp$-компактификацией пространства R называется всякое такое непрерывное отображение ξ пространства R в некоторый компакт S, что $\xi(R)$ плотно в S и что для любых открытых в S множеств U и W, замыкания которых не пересекаются, всегда $\xi^{-1}(U)\perp\xi^{-1}(W)$. Наконец $\perp$-компактификация $\xi_1(R)\subset S_1$ считается слабее $\perp$-компактификации $\xi_2(R)\subset S_2$, если существует такое непрерывное отображение ζ компакта S_1 на компакт S_2, что $\zeta\xi_1=\xi_2$.

Оказывается, что в случае, когда пространство квазикомпонент пространства R является компактом (такие пространства автор называет связанными (bündig), существует наислабейшая $\perp$-компактификация. Построению такой компактификации для связанных пространств и посвящена бóльшая часть работы. Кроме того, доказывается, что для топологических многообразий со счетной базой (в частности, для областей n-мерных многообразий) наислабейшая $\perp$-компактификация совпадает с компактификацией, полученной Мазуркевичем при помощи простых концов (Mazurkiewicz S., Fundam. math., 1945, **33**, 177—228). В работе много опечаток. *Ю. М. Смирнов*

4371. Лемма о множествах типа F_σ. Кнастер, Рейхбах (Un lemme sur les F_σ. Knaster B., Reichbach M.), Fundam. math., 1953, **40**, 172—179 (франц.)

Работа содержит доказательство следующей леммы: пусть R — компакт; любое множество $A\subset R$ типа F_σ размерности $n\geqslant 0$ можно таким образом представить в виде суммы счетного числа компактных множеств Φ_i сколь угодно малого диаметра, стремящегося к нулю при $i\to\infty$, что пересечение любых r множеств Φ_i имеет размерность $\leqslant n-r+1$. *Ю. М. Смирнов*

4372. Замечание об R-эквивалентных пространствах. Ганя (Remark on R-equivalent spaces. Ganea Tudor), Acta math. Acad. sci. hung., 1952, **3**, № 4, 295—297 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.; резюме русск.)

Компакты X и Y называются R-эквивалентными, если каждый из них гомеоморфен некоторому ретракту другого, т. е. если существуют такие гомеоморфные отображения $f: X\to Y$ и $g: Y\to X$, что компакты $g(Y)$ и $f(X)$ являются ретрактами соответственно компактов X и Y. Автор доказывает, что если наложить дополнительное требование равностепенной непрерывности семейства итераций $\varphi^n(n=0,1,\dots)$ отображения $\varphi=fg$, то R-эквивалентные компакты X и Y имеют один и тот же гомотопический тип. Это дает (при указанном дополнительном требовании) положительное решение 4-й проблемы Борсука (Borsuk K., Fundam. math., 1935, **24**, 249—258). *Ю. М. Смирнов*

4373. Гомотопическая классификация отображений четырехмерного комплекса в двумерную сферу. Симада (Homotopy classification of mappings of a 4-dimensional complex into a 2-dimensional sphere. Shimada Nobuo), Nagoya Math. J., 1953, **5**, 127—144 (англ.)

Основная цель работы состоит в решении сформулированной в заголовке задачи гомотопической классификации. Автор вводит некоторые новые топологически инвариантные гомологические операции. В первую очередь он определяет операцию, которая относит любой r-мерной $\bigtriangledown$-цепи a и любой s-мерной $\bigtriangledown$-цепи b некоторую $(r+s+1)$-мерную $\bigtriangledown$-цепь $a\bigvee b$. Используя эту операцию для случая $r=s=2$, автор определяет инвариантную гомологическую операцию ψ, которая относит любым двумерным целочисленным классам $\bigtriangledown$-гомологий u и v, удовлетворяющим условию $u\bigcup v=0$, смежный класс $\psi(u,v)$ пятимерной группы $\bigtriangledown$-гомологий (по модулю 2) по модулю некоторой подгруппы. Эта новая операция ψ симметрична, но не билинейна. При помощи этой операции можно вычислить третье препятствие отображений в двумерную сферу S^2. Более точно, пусть K — конечный полиэдр, а K^n — его n-мерный остов. Пусть $f: K^2\to S^2$ некоторое непрерывное отображение, продолжаемое на K^4. Тогда препятствия для продолжения f на K^5 заполняют смежный класс $\psi(c^2(f),c^2(f))$, где $c^2(f)\in H^2(K)$ — характеристический класс отображения f. Из этой теоремы продолжения автор обычными приемами выводит теорему гомотопической классификации четырехмерного комплекса в двумерную сферу.

В замечании, следующем за доказательством, автор отмечает, что рассматриваемая теорема гомотопической классификации независимо най-

дена Адемом (Adem J., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1952, 38, 720—726). В действительности, заметка Адема содержит лишь предварительное сообщение (без доказательств) о решении классификационной задачи для отображений $(n+2)$-мерного комплекса в n-мерную сферу для $n>2$. Однако незначительное изменение метода Адема приводит к теореме классификации и в случае $n=2$. *W. S. Massey*

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 7, 631.

4374. О приведенных препятствиях Хопфа. К а р в а л ью (Sur les obstacles réduits de H. Hopf. C a r v a l h o C a r l o s A. A. d e), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 16, 867—869 (франц.)

Пусть $\mathscr{F}$ — косое произведение, слой F которого является ориентируемым компактным n-мерным многообразием, а база B — полиэдром размерности $n+k$, где k — наименьшее число, большее единицы, для которого $\pi_k(F)\neq 0$. Пусть $\mathscr{F}'$ — другое косое произведение с той же базой, пространство и слой F' которого асферичны во всех размерностях, меньших $n+k-1$. Предположим, что ассоциированные с этими косыми произведениями пучки групп гомологий и гомотопических групп тривиальны. Пусть, наконец, для любой точки $x\in B$ слой F'_x является пространством некоторого косого произведения с базой F_x, группа которого транзитивно действует на его слое F'' и является связной компактной группой Ли. Проекция p этого косого произведения порождает гомоморфизм $p_*:\pi_{n+k-1}(F')\to\pi_{n+k-1}(F)$. Далее, пусть гомоморфизм Хопфа $\rho:\pi_{n+k-1}(F)\to H_k(F)$ (где H_k обозначает k-мерную целочисленную группу гомологий) нетривиален (о гомоморфизме Хопфа см. Hopf H., Colloque de Topologie (Espaces fibrès), C. B. R. M. Bruxelles, 1950, 116—121). Тогда оказывается, что группа $H_k(F)$ изоморфна группе $H_n(F)$ и потому является свободной циклической группой. Кроме того, если ядро гомоморфизма p_* тривиально, то это же справедливо и для гомоморфизма ρp_*.

Пусть f' — некоторая секущая поверхность косого произведения F' над B^{n+k-1}, а $o(f')\in C^{n+k}(B,\pi_{n+k-1}(F'))$ — препятствие к ее распространению на B^{n+k}. Образ $or(f')\in C^{n+k}(B,H_k(F))$ препятствия $o(f')$ при гомоморфизме групп цепей, порожденном гомоморфизмом ρp_*, называется приведенным препятствием, а его класс гомологий $cr(\mathscr{F},\mathscr{F}')$ — приведенным характеристическим классом пары $\mathscr{F},\mathscr{F}'$ косых произведений. Оказывается, что $cr(\mathscr{F},\mathscr{F}')$ есть образ характеристического класса Уитни — Стинрода $c(\mathscr{F}')$ при гомоморфизме групп ∇-гомомологий, порожденном гомоморфизмом ρp_*, причем $cr(\mathscr{F},\mathscr{F}')=0$ тогда и только тогда, когда $c(\mathscr{F}')=0$.

В частных предположениях рассматриваемый автором вопрос изучался Кундертом (случай, когда F есть комплексное проективное пространство, $F'=S^{n+1}$, $F''=S'$, $n>2$) и Хиршем (случай, когда $F=S^2$, $F'=S^3$, $F''=S^1$). *М. М. Постников*

4375. Об ориентируемости аналитических однородных многообразий. О н и щ и к А. Л., Успехи матем. наук, 1953, **8**, № 5 (57), 121—130

В заметке приведен необходимый и достаточный признак ориентируемости аналитического однородного многообразия, сводящий вопрос об ориентируемости к изучению внутренних автоморфизмов стационарной подгруппы. Даны примеры ориентируемых и неориентируемых многообразий. Основными являются следующие две теоремы.

Для ориентируемости однородного многообразия необходимо и достаточно, чтобы ни одно преобразование из стационарной подгруппы точки a не меняло ориентации в точке a (теорема 2). Непосредственным следствием этой теоремы является факт ориентируемости однородного многообразия со связной стационарной подгруппой.

Для того чтобы однородное многообразие было ориентируемым, необходимо и достаточно, чтобы ни один внутренний автоморфизм стационарной подгруппы не менял ее ориентации (теорема 3).

В качестве иллюстрации теорем приводятся четыре примера. В первом и третьем примерах доказывается ориентируемость однородного многообразия k-мерных подпространств n-мерного комплексного векторного пространства и однородного многообразия k-мерных ориентированных подпространств действительного n-мерного векторного пространства. Во втором примере доказывается ориентируемость однородного многообразия k-мерных подпространств n-мерного действительного векторного пространства при четном n и неориентируемость такого многообразия при n нечетном.

В формулировке четвертого примера допущена неточность.

Автор считает, что если S — не меняющая ориентации аналитическая инволюция орентируемого аналитического многообразия M, то пространство $\overline{M}$, полученное из M склеиванием пар точек p, $S(p)$ для всех $p\in M$, также является многообразием. Однако это неверно. Примером может служить симметрия четырехмерной сферы относительно своего диаметра. *Р. В. Гамкрелидзе.*

4376. Развитие топологии в СССР. П о н т р я г и н Л. С. (拓樸學在蘇聯。*Л. С.* 邦德里亞金), 科學通報 (Кэсюэ тунбао), 1953, № 7, 78—80 (кит.)

4377. Что такое топология и чем она занимается. Г а н я (Ce este şi ce urmăreşte topologia. G a n e a T u d o r), Rev. mat. şi fiz., 1953, **4**, № 11, 273—278 (рум.)

Популярная статья.

4378. О метризации топологических пространств. С м и р н о в (On metrization of topological spaces. S m i r n o v Yu. M.), Amer. Math. Soc. Translation, № 91, 1953, 17 (англ.)

Перевод статьи Ю. М. Смирнова из журнала «Успехи матем. наук», 1951, **6**, № 6(46), 100—111.

Перевод из Math. Rev., 1954, 15, № 1, 50.

4379 К. Комбинаторная топология. К а в а д а, Т а к е у т и (位相幾何學。河田敬義，竹內外史 250 стр., Изд-во Асакура, 1953, 480 иен), 科學 (Кагаку), 1953, **23**, № 9, 486 (библ.)

См. также: 4408, 4560, 4577 К

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

4380. Некоторые замечания о равномерной сходимости. Эглстон (Some remarks on uniform convergence. Eggleston H. G.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1953, сер. 2, **10**, 42—52 (англ.)

Изучаются различные критерии равномерной сходимости действительных функций. В качестве вспомогательного предложения доказывается следующее утверждение:

Пусть X_n — последовательность спрямляемых дуг длины l_n, лежащих в ограниченной части евклидова пространства E^n, и пусть существует предел $\lim_{n\to\infty} l_n = e$. Тогда, если X — спрямляемая дуга длины l и если $X \subseteq \underline{\lim}_{n\to\infty} X_n$, то $X = \overline{\lim} X_n$.

Показывается, что с помощью этой теоремы можно получить известные критерии равномерной сходимости Бухмана и Хилдебрандта, Беренда, Бендиксона и некоторые их видоизменения, например, для функций многих переменных.

Л. Д. Кудрявцев

4381. Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях. Никольский С. М., Матем. сб., 1953, **33** (75), № 2, 261—326

Работа содержит полное доказательство результатов, опубликованных автором ранее (Докл. АН СССР, 1952, **82**, № 4, 521—524; РЖМат, 1953, 148, 149). Различные леммы, используемые в доказательствах (например, о частных производных измеримых функций), представляют и самостоятельный интерес. Ниже будут изложены только еще не реферированные результаты.

Обозначения см. РЖМат, 148. Пусть $\eta > 0$. Обозначим через G_η множество точек области G, расстояние которых от границы G больше η. Если $G = R_n$, то полагаем $G_\eta = R_n$. Если $r_1 = \ldots = r_n = r$ и $M_1 = \ldots = M_n = M$, то вместо $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}(G; M_1, \ldots, M_n)$ пишем $H_p^{(r)}(G; M)$.

Доказываются, в частности, следующие теоремы:

1) Если $f \in H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}(G; M_1, \ldots, M_n)$, то, каково бы ни было $\eta > 0$, существует функция φ, определенная на R_n и принадлежащая классу $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}(R_n; \overline{M}_1, \ldots, \overline{M}_n)$, совпадающая с f на G_η, причем

$$\overline{M}_i < c_{1\eta} \| f \|_{L_p(G)} + c_{2\eta} M_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

а $c_{1\eta}$ и $c_{2\eta}$ — положительные константы, зависящие только от G, η и r_i $(i = 1, \ldots, n)$. При этом можно выбрать φ так, что выполняется неравенство $\| \varphi \|_p^{(n)} \leqslant c_\eta \| f \|_{L_p(G)}$, где c_η зависит только от G_η (Функцию φ в этой теореме можно всегда построить так, что последнее неравенство будет выполнено с $c_\eta = 1$. *Прим. реф.*).

2) Если r_i $(i = 1, \ldots, n)$ — целые числа, а f и ее частные производные до порядков r_i интегрируемы в p-й степени на G и непрерывны на G, то функцию φ, удовлетворяющую условиям теоремы 1), можно выбрать так, что она и ее частные производные до порядков r_i будут непрерывны и интегрируемы в p-й степени на R_n.

3) Если $f \in H_p^{(r)}(G; M)$, то, каково бы ни было $\eta > 0$, имеет место неравенство

$$\left\| \frac{\partial^\lambda f}{\partial x_1^{\lambda_1} \ldots \partial x_n^{\lambda_n}} \right\|_{L_p(G_\eta)} < c_{1\eta} \| f \|_{L_p(G)} + c_{2\eta} M,$$

$$0 \leqslant \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \lambda \leqslant r,$$

где $c_{1\eta}$ и $c_{2\eta}$ зависят только от G, η и r.

4) Пусть $f \in H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}(R_n; M, \ldots, M)$ и пусть для неотрицательных чисел $\rho_1, \ldots, \rho_n$ выполняется неравенство $\sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k}{r_k} < 1$. Тогда на R_n существует частная производная $\frac{\partial^{\rho_1+\ldots+\rho_n} f}{\partial x_1^{\rho_1} \ldots \partial x_n^{\rho_n}}$, принадлежащая классу $H_p^{(r_1',\ldots,r_n')}(R_n; \overline{M}, \ldots, \overline{M})$, где

$$r_i' = r_i \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k}{r_k}\right) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$\overline{M} \leqslant 4 \| f \|_p^{(n)} + cM. \tag{1}$$

При этом справедливо неравенство

$$\left\| \frac{\partial^{\rho_1+\ldots+\rho_n} f}{\partial x_1^{\rho_1} \ldots \partial x_n^{\rho_n}} \right\|_p^{(n)} \leqslant \| f \|_p^{(n)} + cM. \tag{2}$$

В неравенствах (1) и (2) константа c зависит только от p, r_k и ρ_k. *С. М. Лозинский*

Примечание редакции. Утверждение 4) есть обобщение соответствующего предложения С. Н. Бернштейна (Докл. АН СССР, 1948, **59**, № 8, 1379—1384) и прежнего результата автора (Докл. АН СССР, 1948, **59**, 1533—1536).

4382 К. Теория функций действительного переменного. Общая часть. Лузин Н. Н. Учебн. пособие для ун-тов и пед. ин-тов УССР, перев. на укр. со 2-го изд., 308 стр., Рад. школа, Киев, 1953, 8 р. 35 к. (библ.)

4383 К. Аддитивные функции множества и интегрирование в абстрактных пространствах. Кафьеро (Funzioni additive d'insieme ed integrazione negli spazi astratti. Cafiero Federico, 178 p., Istituto di matematica della Università di Napoli, Napoli, ed. Liguori, 1953), Bibliogr. italiana, 1953, № 8 (628), 362 (библ.)

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

4384. О порядковых типах, имеющих равные истинные остатки. Серпинский (Sur les types ordinaux dont tous les vrais restes sont égaux. Sierpiński Wacław), Fundam. math., 1952, 39, 1—7 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

Пусть φ — порядковый тип упорядоченного множества E. Для каждого $a \in E$ тип множества E_a, состоящего из элементов E, следующих за a, называется истинным остатком типа φ. Автор доказывает, что если все истинные остатки типа φ равны одному и тому же типу ψ, то ψ является порядковым числом вида ω^α, так что φ имеет вид суммы $\ldots + \beta_3 + \beta_2 + \beta_1 + \omega^\alpha$, где β_n суть порядковые числа, меньшие чем ω^α. Обозначим через m_α число разных типов φ, могущих быть представленными в вышеуказанном виде; автор доказывает, что если $\alpha < \omega$, то $m_\alpha = \alpha + 1$, а если $\omega_\xi \leqslant \alpha < \omega_{\xi+1}$, то $m_\alpha = \aleph_\xi^{\aleph_0}$. *A. Mostowski*

4385. Некоторые замечания о порядковых типах и разложениях множеств. Гинсберг (Some remarks on order types and decompositions of sets. Ginsburg Seymour), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 74, № 3, 514—535 (англ.)

Рассматриваются две группы вопросов: (P). Существование порядкового типа τ такого, что $\sigma < \tau < \overline{E}$, где σ — данный порядковый тип, E — заданное множество, порядковый тип которого равен $\overline{E}$, и $\sigma < \overline{E}$. (Q). Разложение множеств мощности $2^{\aleph_0}$ на сумму $2^{\aleph_0}$ попарно не пересекающихся множеств, обладающих специальными свойствами.

Бо́льшая часть работы посвящена первой группе вопросов. Автор указывает ряд достаточных условий существования порядкового типа τ, указанного выше.

Принятые обозначения: R — множество всех вещественных чисел, λ — его порядковый тип, η — порядковый тип множества всех рациональных чисел, упорядоченных в естественном порядке.

Пусть E — линейное множество мощности $2^{\aleph_0}$ и σ — порядковый тип, $\sigma < \overline{E}$, обладающий тем свойством, что для всякого подмножества A множества E такого, что $\overline{A} \leqslant \sigma$, множество $E - A$ имеет мощность $2^{\aleph_0}$. Тогда существует порядковый тип τ, для которого $\sigma < \tau < \overline{E}$ (теорема 1.1). Из этой теоремы выводится следствие:

Пусть E — линейное множество мощности $2^{\aleph_0}$, обладающее тем свойством, что если $A \subset E$ и $\overline{A} < \overline{E}$, то мощность множества $E - A$ равна $2^{\aleph_0}$. Тогда для каждого порядкового типа σ, $\sigma < \overline{E}$, может быть найден другой тип τ такой, что $\sigma < \tau < \overline{E}$.

Определение. Непустое линейное множество E называется имеющим «подобное разложение», если E может быть представлено как сумма $2^{\aleph_0}$ попарно не пересекающихся множеств E_ξ, где $\overline{E_\xi} \equiv \overline{E}$. Порядковый тип σ называется имеющим «подобное разложение», если $\sigma \equiv \overline{E}$, где E имеет «подобное разложение».

Доказываются предложения:

1. Если E имеет «подобное разложение», то для всякого порядкового типа σ, $\sigma < \overline{E}$, можно найти такой порядковый тип τ, что $\sigma < \tau < \overline{E}$. Автор указывает, что ему неизвестно, существуют ли порядковые типы, отличные от λ, имеющие «подобное разложение».

2. Пусть α — какой-угодно порядковый тип, для которого $\alpha < \alpha 2$. Тогда для всякого порядкового типа σ, для которого $\sigma < \alpha\omega$, существует порядковый тип τ такой, что $\sigma < \tau < \alpha\omega$ (теорема 1.3).

3. Пусть $E \equiv \alpha\omega$, где $\alpha \equiv \alpha 2$. Пусть далее $\sigma < \alpha$, где $\sigma < \sigma 2$. Тогда существует порядковый тип τ такой, что $\sigma < \tau < \overline{E}$ (теорема 1.5). Отсюда следует, что если $\sigma < \eta$, то существует порядковый тип τ, для которого $\sigma < \tau < \eta$.

Определение. Множество E называется универсальным множеством для счетных порядковых типов, если для всякого счетного порядкового типа α множество E содержит подмножество порядкового типа α. Легко доказывается существование универсального множества.

4. Для того чтобы $\overline{E} \equiv \eta$, необходимо и достаточно, чтобы E было счетным, универсальным для всех счетных порядковых типов (теорема 1.7).

Определение. Элемент x_0 множества E называется фиксированной точкой множества E, если $f(x_0) = x_0$ для всякого подобного преобразования $f(x)$ множества E самого в себя.

Фиксированные точки характеризуются следующим свойством: для того чтобы x_0 была фиксированной точкой множества E, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{E - \{x_0\}} < \overline{E}$ (теорема 2.1).

Определение. Подмножество A множества E называется множеством последовательных элементов множества E, если для каждой пары $(a; b)$ элементов множества A, где $a < b$, множество $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b,\ x \in E\}$ является конечным подмножеством множества A.

Если A состоит только из двух элементов a и b, то a и b называются последовательными элементами множества E. Эти понятия используются в следующей простой теореме:

Если $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — какое-угодно множество $n+1$ последовательных элементов множества E, x_0 — фиксированная точка множества E и $A = E - \{x_i \mid i \leqslant n\}$, то существует точно n различных порядковых типов между $\overline{A}$ и $\overline{E}$ (теорема 2.2).

Это утверждение обобщается следующим образом:

Если x_0 есть фиксированная точка множества E,

$A = \{x \mid x \leqslant x_0,\ x \in E\}$ и $B = \{x \mid x > x_0,\ x \in E\}$,

то существует в точности $\aleph_0$ различных порядковых типов τ, для которых $\overline{E} < \tau < \overline{A} + \omega + \overline{B}$.

Автор доказывает также следующее:

Пусть E — линейное множество мощности $2^{\aleph_0}$, σ — порядковый тип, $\sigma < \overline{E}$, мощности $2^{\aleph_0}$, обладающий тем свойством, что если $\overline{A} \leqslant \sigma$, то мощность множества $E - A$ равна $2^{\aleph_0}$. Тогда суще-

ствует порядковый тип τ мощности $2^{\aleph_0}$ такой, что $\tau < \overline{E}$ и τ несравнимо с σ.

Из второй группы вопросов (Q) автор доказывает утверждение:

Если f есть преобразование подобия множества E самого в себя такое, что $f(x) \neq x$ для всякого x из множества E, тогда E может быть разложено на $\aleph_0$ попарно не пересекающихся множеств E_n, где $\overline{E}_n \equiv \overline{E}_m$ (но E_n может и не быть равным E) (теорема 3.3).

Автор формулирует ряд утверждений (главным образом из второй группы вопросов (Q)), используя понятия, за определением которых отсылает к своей еще не опубликованной работе, а также при доказательстве ряда предложений, указанных выше, использует результаты, содержащиеся в упомянутой неопубликованной работе.

В. Я. Арсенин

4386. О разбиении упорядоченного континуума. **Новак** (On partition of an ordered continuum. Novák Josef), Fundam. math., 1952, **39**, 53—64 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Пусть C — упорядоченный континуум. Множество $\mathfrak{P}$ замкнутых интервалов называется разбиением континуума C, если выполнены следующие условия: 1) $C \in \mathfrak{P}$; 2) если $X, Y \in \mathfrak{P}$, то либо $X \subset Y$, либо $Y \subset X$, либо $X \cdot Y$ не является интервалом; 3) если $X \in \mathfrak{P}$, то существуют интервалы $X_1, X_2 \in \mathfrak{P}$ такие, что $X = X_1 + X_2$ и $X_1 \cdot X_2$ содержит только одну точку; 4) пересечение монотонной системы интервалов, принадлежащих $\mathfrak{P}$, является точкой или принадлежит $\mathfrak{P}$.

Каждый упорядоченный континуум обладает разбиением. Каждое разбиение $\mathfrak{P}$ упорядоченного континуума имеет мощность $m(C)$, где $m(C)$ — наименьшее кардинальное число, служащее мощностью плотного подмножества пространства C. Каждый упорядоченный континуум C подобен некоторому лексикографически упорядоченному множеству трансфинитных последовательностей из 0 и 1 типа ϑ ($\overline{\vartheta} \leqslant m(C)$). Для того чтобы каждый упорядоченный континуум мощности $\aleph_\sigma$ содержал хотя бы одну точку характера c_{00}, необходимо и достаточно, чтобы $\aleph_\sigma < 2^{\aleph_1}$. Каждый упорядоченный континуум C мощности $2^{\aleph_0}$ такой, что $m(C) = \aleph_1$, содержит плотное в C подмножество мощности $2^{\aleph_0}$, точки которого имеют характер c_{00}.

R. Sikorski

4387. О представлении упорядоченных множеств. **Новотный** (Sur la représentation des ensembles ordonnés. Novotný Miroslav), Fundam. math., 1952, **39**, 97—102 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

Подмножество H упорядоченного множества M называется плотным в M, если для каждой пары элементов $a < b$ множества M существует соответствующая пара $a' < b'$ элементов H такая, что $a \leqslant a' < b' \leqslant b$. Порядковой сепарабельностью (séparabilité ordinale) множества M называется наименьшая мощность множества, плотного в M. Если множество непрерывно упорядочено, то порядковая сепарабельность совпадает с обычной топологической сепарабельностью (для которой в нашей литературе принят термин «псевдовес»), в противном случае эти понятия могут различаться, как показывает пример лексикографически упорядоченного множества всех пар (x, y), где x — действительное число, а $y = 0$ или $y = 1$, смотря по тому, рационально ли x или нет; порядковая сепарабельность этого множества равна $2^{\aleph_0}$, а топологическая $\aleph_0$. Ниже ν означает любое порядковое число.

Теорема 1. Всякое упорядоченное множество порядковой сепарабельности $\aleph_\nu$ подобно некоторому лексикографически упорядоченному множеству трансфинитных последовательностей типа ω_ν, состоящих из 0 и 1.

Обозначим через U_{ω_ν} множество всех трансфинитных последовательностей типа ω_ν из 0 и 1. Пусть V_{ω_ν} означает множество, которое получится, если в U_{ω_ν} отождествить последовательности $\{x_\lambda\}_{\lambda<\omega_\nu}$, $\{y_\lambda\}_{\lambda<\omega_\nu}$, для которых существует индекс $\delta < \omega_\nu$ такой, что $x_\lambda = y_\lambda$ при $\lambda < \delta$; $x_\delta + y_\delta = 1$, $x_\lambda \neq x_\delta$, $y_\lambda \neq y_\delta$ при $\lambda > \delta$. Множество V_{ω_ν} непрерывно упорядоченное.

Теорема 2. Всякий упорядоченный континуум порядковой сепарабельности $\aleph_\nu$ подобен некоторой системе $\overline{M}$ непересекающихся замкнутых интервалов и одноточечных множеств континуума V_{ω_ν}, причем $\bigcup \overline{M} = V_{\omega_\nu}$.

Теорема 3. Для всякого непрерывно упорядоченного множества сепарабельности $\aleph_\nu$ существует разбиение порядка, не превосходящего ω_ν.

Теорема 2 является обращением ранее доказанного результата Новака (Novák J., Czechosl. Math. J., 1951, **76**, 63—79). Теоремы 1 и 3 являются решениями сформулированных Новаком проблем.

А. С. Есенин-Вольпин

4388. О представлении частично упорядоченных множеств последовательностями нулей и единиц. **Новотный** (O representaci částečně uspořádaných množin posloupnostmi nul a jedniček. Novotný Miroslav), Časop. pěstov. mat., 1953, **78**, № 1, 61—64 (чеш.)

Переносятся на частично упорядоченные множества результаты Серпинского (Sierpiński W., Fundam. math., 1949, **36**, 56) и автора (см. реф. 4387).

Пусть ν — произвольное порядковое число, а γ — произвольная система трансфинитных последовательностей типа ω_ν, состоящих из нулей и единиц.

Множество γ частично упорядочивается следующим образом: (правило а) для двух последовательностей полагаем $x_0 x_1 \ldots x_\lambda \ldots (\lambda < \omega_\nu) \leqslant y_0 y_1 \ldots y_\lambda \ldots (\lambda < \omega_\nu)$, если $x_\lambda \leqslant y$ для всех $\lambda < \omega_\nu$.

Теорема 1. Каждое частично упорядоченное множество мощности $\aleph_\nu$ изоморфно некоторой системе трансфинитных последовательностей нулей и единиц типа ω_ν, упорядоченных по правилу а.

Теорема 2. Каждое частично упорядоченное множество порядковой сепарабельности $\aleph_\nu$ изоморфно некоторому множеству трансфинитных последовательностей нулей и единиц, упорядоченных по правилу а. *А. С. Есенин-Вольпин*

4389. Одна проблема об упорядоченных множествах. Эрдёш, Радо (A problem on ordered sets. Erdös P., Rado R.), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 4, № 112, 426—438 (англ.)

Авторы рассматривают следующее свойство P упорядоченных множеств:

Если S — упорядоченное множество, его мощность $|S| = \aleph_n$ и α — порядковое число, $\alpha < \omega_n$, то имеет место один из трех случаев: 1) существует $S' \subseteq S$ такое, что порядковый тип $\overline{S'} = \omega_n$; 2) существует $S'' \subseteq S$ такое, что $\overline{S''} = \omega_n^*$; 3) существуют в S подмножества S_1 и S_2 такие, что $\overline{S_1} = \alpha$, $\overline{S_2} = \alpha^*$ (α^* означает порядковый тип, получающийся из α путем обращения, т. е. замены отношения порядка $x < y$ на $y < x$). Для любого кардинального числа a a^- означает непосредственно предшествующее a кардинальное число, если оно существует, и само a — в противном случае.

Основной результат статьи состоит в доказательстве следующей теоремы:

Пусть для любого α имеет место обобщенная континуум-гипотеза $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Тогда кардинальное число $\aleph_n$ обладает свойством P тогда и только тогда, когда $\aleph_n^-$ регулярно.

Обобщенная континуум-гипотеза используется только при доказательстве достаточности регулярности $\aleph_n^-$ и притом только для $\alpha < n$. Указывается, что обобщенная континуум-гипотеза не только существенна для справедливости теоремы, но и эквивалентна ее заключению — что было доказано Гилманом (L. Gillman).

В процессе доказательства авторы вводят отношение $a \to (b_1, b_2)^2$ между кардинальными числами a, b_1, b_2, которое они считают очень существенным во многих исследованиях по теории множеств и многочисленные свойства и обобщения которого они рассчитывают исследовать в дальнейшей работе. Оно определяется следующим образом:

Пусть $\Omega_2(S)$ означает множество всех двуэлементных подмножеств множества S; если мощность $|S| = a, \Omega_2(S) = K_1 + K_2$, то существуют $S' \subseteq S$ и $\lambda \in \{1, 2\}$ такие, что $|S'| = b_\lambda$, $\Omega_2(S') \subseteq K_\lambda$.

При помощи обобщенной континуум-гипотезы доказывается следующее утверждение, в котором a^+ есть следующее за a кардинальное число.

Если $a \geqslant \aleph_0$ и b — наименьшее кардинальное число такое, что $a^b > a$, то $a^+ \to (b, a^+)^2$, $a^+ \not\to (b^+, a^+)^2$, $a^b \not\to (b^+, a^+)^2$.

Индексом Лузина $\Lambda(\varphi)$ порядкового типа φ авторы называют наименьшее кардинальное число n такое, что невозможно найти n взаимно не пересекающихся открытых интервалов упорядоченного множества S, имеющего тип φ.

Если $a = \aleph_m$ и $b = \aleph_l$, то F_{ab} означает алфавитно упорядоченное множество функций $f(\lambda)$, определенных при $\lambda < \omega_l$ и принимающих значения $f(\lambda) < \omega_m$; $\overline{F}_{ab}$ — порядковый тип этого множества. Формулируется теорема:

Если $a \geqslant \aleph_0$ и b — наименьшее кардинальное число такое, что $a^b > a$, то $\Lambda(\overline{F}_{ab}) = a^+$. *А. С. Есенин-Вольпин*

4390. Кофинально концентрированные направленные системы. Норрис (Cofinally concentrated directed systems. Norris Michael J.), J. Computing Systems, 1953, 1, 81—85 (англ.)

Автор называет направленную систему A кофинально концентрированной (cofinally concentrated), если для каждого элемента a из A множество таких элементов b, для которых ложно $a \leqslant b$, имеет мощность, меньшую чем A. Его основная теорема утверждает, что если A — кофинально концентрированная направленная система, а Ω — наименьшее порядковое число той же мощности, что и A, то в A имеется вполне упорядоченное кофинальное подмножество, порядковый тип $f(\Omega)$ которого есть наименьший порядковый тип кофинального подмножества для множества всех порядковых чисел, меньших Ω.

Отсюда вытекает, что если мощность кофинального кофинально концентрированного подмножества A регулярна, то она является наименьшей мощностью кофинальных подмножеств; что имеется не более одного регулярного кардинального числа, являющегося мощностью кофинального кофинально концентрированного подмножества; если мощность кофинально концентрированной системы регулярна, то не существует кофинального подмножества меньшей мощности. Эти утверждения, однако, неверны для нерегулярных мощностей. *О. Frink*

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 8, 753.

4391. О подобии упорядоченных континуумов типов τ и τ^ν. Новотный (O podobnosti uspořádaných kontinuí typů τ a τ^ν. Novotný Miroslav), Časop. pěstov. mat., 1953, 78, № 1, 59—60 (чеш.)

Подразумевая под замкнутым упорядоченным континуумом (у. к.) непрерывное упорядоченное множество с концами, под открытым у. к. — то же без концов, под полуоткрытым у. к. — то же с одним концом и просто под у. к. — любое из перечисленных понятий, автор доказывает следующие теоремы:

Теорема 1. Если C — замкнутый у. к., то никакая система его непересекающихся замкнутых интервалов не подобна континууму C при обычном способе упорядочения (пустое множество и одноточечное множество не считаются интервалами).

Теорема 2. Если C — у. к., $\nu > 1$ — произвольное порядковое число, C^ν — лексиографически упорядоченная система всех последовательностей типа ν, состоящих из элементов упорядоченного континуума C, то C^ν не подобно C.

Теорема 3. Существует упорядоченный континуум C такой, что некоторая система его замкнутых непересекающихся интервалов подобна упорядоченному континууму C при обычном способе упорядочения. *А. С. Есенин-Вольпин*

4392. Замечания об обобщенной гипотезе $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, связанные с попыткой доказательства Эро. Нёймер (Bemerkungen zur allgemeinen Hypothese $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ im Anschluß an einige Beweis-

versuche von H. Eyraud. Neumer Walter), Math. Nachr., 1953, 9, № 6, 321—342 (нем.)

Эро опубликовал в 1949—1950 гг. доказательство континуум-гипотезы и ее обобщения, указанного в заглавии; доказательство оказалось ошибочным. Автор указывает, что попытка Эро все же представляет частичный интерес, так как дает метод для доказательства эквивалентности обобщенной континуум-гипотезы и некоторых предложений, сформулированных в терминах трансфинитных последовательностей и связанных с ними функций.

А. С. Есенин-Вольпин

4393 К. Трансфинитная нумерация. III. Дополнительные исследования об упорядочении. Данжуа (L'énumération transfinie. 3. Études compleméntaires sur l'ordination. Denjoy Arnaud, 615—773 pp., fig., Gauthier-Villars (impr. de Gauthier-Villars), 1953, 2.400 fr.), Bibliogr. France, 1954, сер. 5, **143**, № 2, 54 (библ.)

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

4394. Асимптотические формулы для некоторых интегралов, обобщающих константы Лебега и Фейера. Лорх (Asymptotic expressions for some integrals which include certain Lebesgue and Fejér constants. Lorch Lee), Duke Math. J., 1953, **20**, № 1, 89—103 (англ.)

Даются асимптотические формулы для интегралов

$$L_1(\xi, b;\ g;\ \tau) = \frac{1}{b}\int_0^{1/\tau(\xi)} \frac{g(\xi t)}{t}\,dt \quad (0 < \tau(\xi) = o(\xi)),$$

$$L(x,\ b; g) = \frac{1}{b}\int_0^{b} \frac{g\,[(2x+1)t]}{\sin t}\,dt \quad (0 < b < \pi)$$

и аналогичных им, где $g(t) \in L\,[0,\pi]$ имеет период π и существует (в некотором смысле) интеграл $\int_0^1 \frac{g(t)}{t}\,dt$; $\xi \to \infty$ (или $x \to \infty$). Например:

$$L_1(\xi, b;\ g;\ \tau) = \frac{1}{b}\,m \ln\frac{\xi}{\tau(\xi)} + \frac{1}{b}\int_0^1 \frac{g(t)}{t}\,dt -$$

$$-\frac{1}{b}\int_1^{\infty} \frac{1}{t}\,\{m - g\,(t)\}\,dt + O\left(\frac{\tau(\xi)}{\xi}\right),$$

где $m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g\,(t)\,dt$.

Для конкретных функций $g(t)$ такого рода формулы были известны и раньше. *С. Б. Стечкин*

4395. К вопросу об интерполировании по корням ортогональных многочленов веса $(1-x^2)^p\,|\,x\,|^q$. Лащенов К. В., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1953, **89**, 191—206

Пусть p, q — вещественные числа и $R_n^{(p,q)}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ суть многочлены порядка, соответственно, n, ортогональные на $[-1,1]$ относительно веса $(1-x^2)^p\,|\,x\,|^q$. Автор выражает многочлены $R_n^{(p,q)}(x)$ через многочлены Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, ортогональные на $[-1,1]$ относительно веса $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Затем, используя результаты, известные для многочленов Якоби, доказывает, что если $p > -1$, $q > -1$ и функции $f(x)$ и $\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ удовлетворяют на $[-1,1]$ условию Дини—Липшица, то последовательность интерполяционных многочленов Лагранжа $\{L_n(f, x)\}_{n=1}^{\infty}$, совпадающих с $f(x)$ в корнях многочленов $R_n^{(p,q)}(x)$, сходится при любом фиксированном ε, $0 < \varepsilon < 1/2$, равномерно к $f(x)$ на каждом из сегментов $[-1+\varepsilon, -\varepsilon]$, $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$. *С. М. Лозинский*

4396. Представление функций рядами полиномов со специальными коэффициентами. Гиленко Н. Д., Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1953, **71**, № 1, 63—69

Дается простое доказательство теоремы:

Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b] \subset (0,1)$, разложима в равномерно сходящийся ряд алгебраических многочленов с коэффициентами, принадлежащими произвольной последовательности чисел

$$\ldots c_{-2} < c_{-1} < 0 < c_1 < c_2 < \ldots,$$

удовлетворяющей условиям:

1) $$\lim_{n\to\infty} |\,c_{\pm n}\,| = \infty,$$

2) $$\sup\{c_{n+1} - c_n\} < c, \quad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots,$$

где c — любая заданная постоянная.

Как замечает автор, эта теорема была доказана референтом (Матем. сб., 1929, **36**, № 3, 184—187), причем у последнего не предполагалось, что 0 принадлежит последовательности коэффициентов. Кроме того, доказывается следующая теорема:

Множество коэффициентов не может быть ограниченным, если для разложения рассматриваются ряды многочленов, в которых каждая степень, показатель которой превосходит заданное натуральное число p, повторяется в ряде не более чем m раз.

Примечание референта. Интересно выяснить, является ли вышеуказанное для множества коэффициентов условие (2) необходимым для справедливости теоремы референта. На стр. 64 имеется ряд опечаток. *Б. М. Гагаев*

4397. Лежандровы коэффициенты функции, ограниченной заданными пределами. Росси (Sui coefficienti di Legendre di una funzione limitata, compresa fra limiti assegnati. Rossi F.-S.), Ann. Scuola norm. sup. Pisa, 1952, **6**, № 3—4, 317—322 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Дана последовательность чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Указываются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы числа a_n были лежандровыми коэффициентами

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)P_n(x)\,dx$$

некоторой функции f, измеримой на $[-1, +1]$ и почти везде удовлетворяющей там условию $|f| \leqslant 1$.

Условия получены как следствие из ранее известного признака, которому должны удовлетворять числа $c_0, c_1, c_2, \ldots$ для того, чтобы они были коэффициентами Фурье

$$c_n = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{+\pi} \psi(t) e^{int} dt$$

функции $\psi(t)$, удовлетворяющей неравенствам $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1$ (Ghizzetti A., Ann. Scuola norm. sup. Pisa, 1950, 4, № 3, 131—156). *В. И. Крылов*

4398. Представление некоторых определенных интегралов с помощью определителей. Ч. 1. Шентон (A determinantal expansion for a class of definite integral. Part 1. Shenton L. R.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1953, сер. 2, **9**, 44—52 (англ.)

Пусть $p_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ — система многочленов, ортонормальных на конечном интервале (a, b) с весом $w(x)$ (случай бесконечного (a, b) будет рассмотрен во 2-й части). Строится новая ортонормальная система многочленов, отвечающая весу $C(x)\,w(x)$, где $C(x)$ — какая-нибудь положительная непрерывная функция, и пишется формула Парсеваля для произвольной функции по отношению к указанной новой системе многочленов. Эта формула подвергается различным тождественным преобразованиям.

Пусть, например, $\theta_k(x)$ — многочлен точно степени k, а $A(x)$ и $B(x)$ — непрерывные функции. Если

$$\gamma_{k,i} = \gamma_{i,k} = \int_a^b \theta_i(x)\,\theta_k(x)\,C(x)\,w(x)\,dx,$$

$$\alpha_k = \int_a^b \theta_k(x)\,A(x)\,w(x)\,dx,$$

$$\beta_k = \int_a^b \theta_k(x)\,B(x)\,w(x)\,dx,$$

то

$$\int_a^b \frac{A(x)B(x)}{C(x)}\,w(x)\,dx = -\lim_{n\to\infty} \frac{N_n}{D_n},$$

где

$$N_n = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_0 & \gamma_{00} & \gamma_{01} & \ldots & \gamma_{0n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_n & \gamma_{n0} & \gamma_{n1} & \ldots & \gamma_{nn} \end{vmatrix},$$

а D_n — минор левого верхнего элемента N_n. Устанавливаются и другие соотношения подобного рода. В частности, на этом пути можно получить известное разложение интеграла

$$\int_a^b \frac{w(x)}{x+z}\,dx$$

в непрерывную дробь. *И. П. Натансон*

4399 Д. О существовании ортонормированного базиса в классе полиномов. Шайдуков К. М. Автореф. дисс. канд. физ.-матем н., Казанский ун-т, Казань, 1954

4400 Д. О суммировании рядов Фурье и интерполяционных процессов для функций двух переменных. Киприянов И. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанский ун-т, Казань, 1954

См. также: 4302 К, 4319, 4326, 4328 К, 4371, 4419 К, 4444, 4466, 4469, 4470, 4485, 4503, 4575

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

4401. О функциях с центром. Пастидес (Sur les fonctions à centre. Pastidès Nicolas), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 17, 957—959 (франц.)

Пусть аналитическая в точке $z = 0$ функция имеет вид $f(z) = sz + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, где $s = e^{i\alpha\pi}$, α иррационально.

Следуя Жюлиа (Julia G., J. math. pures et appl., 1918, 83, 236), автор называет точку $z = 0$ центром $f(z)$, а функцию $f(z)$ функцией с центром, если ряд $\Phi(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n z^n$, формально построенный по уравнению $f[\Phi(z)] = \Phi(sz)$, имеет радиус сходимости, отличный от нуля. Устанавливаются следующие результаты о функциях $f(z)$ с центром.

Теорема I. Если для некоторого ε, $0 < \varepsilon < 1$, существует такое ρ, что для всех n, удовлетворяющих условию $|s^n - s| < \varepsilon$, выполняется неравенство

$$|\beta_n| < \rho^n,$$

то радиус сходимости ряда $\Phi(z)$ отличен от нуля. Указываются основные моменты доказательства.

Обозначая через $f^1(z)$, $f^2(z)$, $\ldots$, $f^n(z)$, $\ldots$ последовательные итерации $f(z)$ и полагая

$$\varphi_n(z) = \frac{z + s^{-1}f^1(z) + s^{-2}f^2(z) + \ldots + s^{-n+1}f^{n-1}(z)}{n} =$$

$$= z + \sum_{p=2}^{\infty} a_{n,p} z^p,$$

автор называет ряд $\varphi_n(z)$ формально сходящимся при $n\to\infty$ к ряду $F(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}b_nz^n$, обратному для $\Phi(z)$, если $\lim_{n\to\infty}a_{n,p}=b_p$ для любого p. Весьма просто доказывается следующая теорема:

Теорема II. Независимо от того, является или нет $f(z)$ функцией с центром, ряд $\varphi_n(z)$ формально сходится к $F(z)$ при $n\to\infty$.

Следствие. Если последовательность $\{f^n(z)\}$ нормальна в некоторой области D, содержащей начало, то последовательность $\{\varphi_n(z)\}$ сходится равномерно внутри D к $F(z)$.

Из этого следствия непосредственно вытекает теорема Жюлиа (см. предыдущую ссылку, стр. 239—242) о том, что если последовательность $\{f^n(z)\}$ нормальна, то функция $f(z)$ есть функция с центром. *Ю. Е. Аленицын*

4402. Об одной теореме Липота Фейера из теории рядов. Фрёйд (Fejér Lipót egy sorelméleti tételéről. Freud Géza), Magyar tudomán. akad. mat. és fiz. osztályának közleményei, 1953, **3**, № 4, 505—506 (венг.)

Функция $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ называется функцией Фейера, если она аналитическая и ограниченная в $|z|<1$ и $\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|^2<\infty$. Такой функцией будет, например, аналитическая, ограниченная и однолистная в $|z|<1$ функция. Для функции Фейера степенной ряд сходится во всех точках на $|z|=1$, в которых существует предел вдоль радиуса (Fejér L., Monatsh. Math., 1917, **28**, 64—76).

В реферируемой работе доказывается, что функции Фейера образуют кольцо. На примере показывается, что все аналитические в $|z|<1$ функции $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_nz^n$ с $\sum_{n=1}^{\infty}n|\alpha_n|^2<\infty$ не образуют кольца. *А. А. Конюшков*

4403. О теореме Пейли — Винера. Микусинский (On the Paley — Wiener theorem. G.-Mikusiński J.), Studia math. (Warszawa), 1953, **13**, № 2, 287—295 (англ.)

Доказывается следующая теорема:

Пусть $F(z)$ — аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re}z>0$ и пусть для почти всех действительных y существует предел

$$\lim_{x\to+0}F(x+iy)=F(iy).$$

Если функция $e^{-k|z|}F(z)$ $(k>0)$ ограничена в полуплоскости $\operatorname{Re}z>0$ и $F(iy)\in L_p(-\infty,\infty)$ $(1\leqslant p\leqslant 2)$, то $F(z)$ допускает для $\operatorname{Re}z>0$ представление в виде абсолютно сходящегося интеграла

$$F(z)=\int_{-k}^{\infty}e^{-zt}f(t)\,dt. \tag{1}$$

В случае $p=1$ функция $f(t)$ в формуле (1) непрерывна и ограничена для $t\geqslant -k$ и допускает представление

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iyt}F(iy)\,dy. \tag{2}$$

В случае $1<p\leqslant 2$ функция $f(t)$ принадлежит L_q $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ и может быть представлена в виде предела в среднем с показателем q:

$$f(t)=\operatorname*{l.\,i.\,m.}_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega}^{\omega}e^{iyt}F(iy)\,dy. \tag{3}$$

Более того, функция $f(t)$, определенная по формуле (2), равна нулю для $t\leqslant -k$, а функция, определенная по формуле (3), обращается в нуль для почти всех $t\leqslant -k$.

Известная теорема Пейли — Винера о целых функциях экспоненциального типа является простым следствием сформулированной выше теоремы. *Б. М. Левитан*

4404. Об ограниченных системах функций. Пешль, Эрве (Über beschränkte Systeme von Funktionen. Peschl Ernst, Erwe Friedhelm), Math. Ann., 1953, **126**, № 3, 185—220 (нем.)

Изучаются системы функций, регулярных в единичном круге и отображающих его на кусок аналитической поверхности (двумерной), лежащей внутри единичного гипершара пространства R^{2n}. Эти системы записываются в виде столбцевых матриц, именуемых в дальнейшем ограниченными функциональными столбцами (Funktionenspalten), что дает возможность, применяя матричное исчисление, придавать получаемым результатам легко обозримый вид, имеющий большую аналогию с классическим случаем $n=1$.

Используя в качестве средства исследования свойств ограниченных функциональных столбцов автоморфизмы единичного гипершара, группе которых придается вид

$$\mathfrak{w}=A\Gamma(a)\frac{\mathfrak{z}-a}{1-\tilde{a}\mathfrak{z}},$$

где

$$\mathfrak{w}=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\\vdots\\w_n\end{pmatrix},\qquad \mathfrak{z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix},$$

$$w_\nu=w_\nu(z_1,z_2,\ldots,z_n),\ a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\ |a|<1,$$

$$\Gamma(a)=\frac{1}{1+\sqrt{1-|a|^2}}\tilde{a}a+\sqrt{1-|a|^2}\,E,$$

A — унитарная матрица (знак «$\sim$» обозначает транспонирование), авторы устанавливают ряд теорем. Прежде всего — принцип максимума модуля

функционального столбца, с помощью которого устанавливается аналог леммы Шварца.

Затем разрешается проблема коэффициентов для семейства ограниченных функциональных столбцов, состоящая в установлении необходимого и достаточного условий ограниченности функционального столбца, формально представленного степенным рядом

$$\mathfrak{f}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \qquad (1)$$

Понимая под $\mathfrak{f}'(z)$ столбец производных, устанавливается теорема искажения, в которой даются ограничения для $|\mathfrak{f}'(z)|$, $|\mathfrak{f}(z)|$ и первых коэффициентов разложения (1).

Развивая геометрическую теорию, авторы получают условия и границы однолистности и звездообразности семейства ограниченных функциональных столбцов. В основу определения этих понятий кладутся соответствующие понятия классической теории.

В заключение приводится обобщение теоремы Жюлиа — Каратеодори, которая ранее была распространена лишь на случай системы двух функций двух комплексных переменных (Miniatoff A., C. r. Acad. sci., 1935, **200**, 711—713). *А. В. Лебедев*

4405. Некоторые канонические конформные отображения многосвязных областей. К о м а т у (Einige kanonische konforme Abbildungen vielfach zusammenhängender Gebiete. K o m a t u Y û s a k u), Proc. Japan Acad. Sci., 1953, **29**, 1—5 (нем.)

Пусть D — область в комплексной плоскости, содержащая $z = \infty$ и ограниченная конечным числом жордановых кривых C, и пусть $C_1 \subset C$, $C_2 = C \setminus C_1$. Автор доказывает существование однолистных отображений $f(z) = z + O(1)$ (вблизи $z = \infty$), для которых

а) $\mathrm{Re}\,\{f(z)\} = \mathrm{const}$, если $z \in C_1$, $\mathrm{Im}\,\{f(z)\} = \mathrm{const}$, если $z \in C_2$;

б) $|f(z)| = \mathrm{const}$, если $z \in C_1$, $\arg\{f(z)\} = \mathrm{const}$, если $z \in C_2$;

в) как и в б), за исключением того, что одна заранее указанная компонента границы отображается в окружность. Все эти отображения единственны и могут характеризоваться надлежащими экстремальными свойствами. *Z. Nehari*

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 10, 969.

4406. К теории особенностей аналитических функций и поверхностей. Р о т ш т е й н (Zur Theorie der Singularitäten analytischer Funktionen und Flächen. R o t h s t e i n W o l f g a n g), Math. Ann., 1953, **126**, № 3, 221—238 (нем.)

При изучении функций двух комплексных переменных рассматриваются множества M числа измерений, меньшего четырех. Множество M называется H-множеством, если для любой области G выполняется соотношение $\mathfrak{H}(G \setminus M) \supseteq \mathfrak{H}(G) \setminus M$, где $\mathfrak{H}(D)$ обозначает оболочку регулярности области D. Известна (Behnke H., Math. Ann., 1936, **113**, 392—397) следующая теорема:

(К). Пусть функция $f(w, z)$ регулярна и однозначна в однолистной области G и пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_n$ — замкнутые куски аналитических поверхностей с границами C и C_n, причем $\mathfrak{F}_n$ и C содержатся в G и $\lim \mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}$. Тогда существует такая окрестность $U(\mathfrak{F})$, что функция $f(w, z)$ будет регулярной и однозначной в $G \cup U(\mathfrak{F})$.

Если утверждение (К) остается справедливым при замене G и $U(\mathfrak{F})$ соответственно через $G' = G \setminus M$ и $U' = U(\mathfrak{F}) \setminus M$, то автор говорит, что (К) имеет место в $G \setminus M$.

Множество M называется K-множеством, если (К) имеет место в $G \setminus M$ при любой области G. Оказывается, что каждое K-множество является H-множеством.

Далее, M называется B-множеством, если в каждой точке $p \in M$ существует гипершар U и такая регулярная бигармоническая в $U \setminus M$ функция $b(w, z)$, что для $R \in M$

$$\lim_{Q_n \to R} b(Q_n) = +\infty \text{ при } Q_n \in U \setminus M.$$

Доказывается, что каждое B-множество есть K-множество, а следовательно, и H-множество.

При доказательстве этой теоремы используется некоторое обобщение радиуса регулярности, называемое автором «числом регулярности $\rho(z)$» (Regularitätszahl $\rho(z)$), и его супергармонический характер.

Изучаемые множества являются аналогами гармонических нуль-множеств, играющих важную роль в современной теории функций одного комплексного переменного. Установленные теоремы показывают, что эти множества не оказывают влияния на оболочку регулярности некоторой области. В качестве B-множеств могут быть взяты плоские множества $w = c$, где c пробегает некоторое гармоническое нуль-множество. Изучение этих множеств приводит к теореме типа основной теоремы Гартогса:

Пусть $\mathfrak{Z} = \{|w| < 1; |z| < 1\}$, $\mathfrak{R} = \left\{\frac{1}{2} < |w| < 1; |z| < 1\right\}$; M — гармоническое нуль-множество плоскостей $w = \mathrm{const}$; $\mathfrak{P}$ — множество точек $|z| < 1$ положительной гармонической меры. Наконец, пусть $\mathfrak{R} \cap M = 0$ и функция $f(w, z)$ регулярна и однозначна в $\mathfrak{R}$ и $\{z = d \in \mathfrak{P}; w \in [(|w| < 1) \setminus M]\}$. Тогда функция $f(w, z)$ будет регулярной и однозначной в $\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z} \setminus M$. Эта теорема обобщается на случай, когда M есть любое B-множество.

Как следствие этой теоремы получается обобщение теоремы Туллена (Thullen P., Math. Ann., 1935, **111**, 137—157) в случае, если вместо одной особой поверхности взять множество особых плоскостей $w = c$ (c из некоторого гармонического нуль-множества). Доказательство теоремы основывается на обобщении известной теоремы Радо на случай многих переменных.

Эта теорема переносится на аналитические поверхности малого числа измерений в пространстве R^{2n}. Пользуясь ею, автор доказывает аналог основной теоремы Гартогса для $(2n-2)$-мерных аналитических поверхностей пространства R^{2n} $(n \geqslant 3)$.

Кроме основных результатов, в статье приводится ряд вспомогательных теорем и дополнений, а также для облегчения чтения работы — ряд известных теорем и основные

положения теории $2k$-мерных аналитических поверхностей. *А. В. Лебедев*

4407. О мере отклонения неаналитических функций от аналитических. Билимович (Sur la mesure de déflexion d'une fonction non analytique par rapport à une fonction analytique. Bilimovitch Anton), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 14, 694—695 (франц.)

Пусть дана функция комплексного переменного $w = P(x, y) + iQ(x, y)$. Условия ее аналитичности можно записать в векторной форме равенством $\operatorname{grad} Q = [k, \operatorname{grad} P]$, где k — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости (x, y), и скобками обозначено векторное произведение. В качестве векторной меры «неаналитичности» функции $P + iQ$ автор предлагает разность $\boldsymbol{B} = \operatorname{grad} Q - [k, \operatorname{grad} P]$. Модуль этого вектора $B = \sqrt{(P_x - Q_y)^2 + (P_y + Q_x)^2}$ — «скалярная мера неаналитичности». Вектор $\boldsymbol{B}$ разлагается на два: $\boldsymbol{B}_1$ и $\boldsymbol{B}_2$ — в направлении $\operatorname{grad} P$ и перпендикулярном — и вводятся два класса неаналитических функций, для которых соответственно $\boldsymbol{B}_1 = 0$ и $\boldsymbol{B}_2 = 0$. Второй класс совпадает с классом парааналитических функций Фреше.

Заметка не содержит сколько-нибудь существенных приложений введенного понятия.

Б. В. Шабат

4408. О гармонических отображениях. Кудрявцев Л. Д., Докл. АН СССР, 1953, 92, № 3, 469—471

Гармоническими автор называет отображения, осуществляемые функциями $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где u и v — гармонические (не обязательно сопряженные) функции. Теорема 1 дает необходимое и достаточное условие существования взаимно однозначного (и с положительным минимумом модуля якобиана) гармонического отображения единичного круга K на односвязную конечную область G, совпадающего на границе с заданным соответствием $f(\theta) = u(\theta) + iv(\theta)$ границ K и G. При этом на соответствие границ накладываются следующие условия: 1) $f(\theta)$ — взаимно однозначное отображение и $f'(\theta)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем, меньшим 1; 2) пусть $\tilde{u}(\theta)$ — функция, ряд Фурье которой сопряжен с рядом Фурье $u(\theta)$, и $F(\theta) = u(\theta) + i\tilde{u}(\theta)$, тогда полное изменение $\arg F'(\theta)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ равно 2π (в заметке здесь опечатка). Упомянутое условие существования состоит в том, что $\tilde{u}'(\theta)\, v'(\theta) - u'(\theta)\, \tilde{v}'(\theta) \neq 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ (в заметке здесь опечатка).

Теорема 3 характеризует структуру множества нулей якобиана гармонического отображения. Это множество (если из него исключить изолированные точки) разбивает область определения отображения на области, называемые каноническими компонентами. В каждой канонической компоненте якобиан сохраняет знак, причем в двух смежных компонентах знаки якобиана различны (теорема 4).

Теоремы 5—7 распространяют на гармонические отображения с изолированным множеством нулей якобиана известные свойства конформных отображений: принципы максимума и минимума модуля и принцип соответствия границ. Аналогичные результаты были получены ранее (Szilárd., Math. Z., 1927, 26, № 4, 653—671), что, повидимому, не было известно автору. Теоремы 8—9 являются частными случаями геометрически естественного утверждения: равномерный предел последовательности гомеоморфных отображений не может «иметь складки».

Теорема 2 представляет собой интересное (хотя и вполне элементарное) замечание о том, что зависимость между гармоническими функциями может быть только линейной. Теоремы приводятся без доказательства. *Б. В. Шабат*

4409. Работы Н. Н. Лузина по теории функций комплексного переменного. Федоров (Lucrările lui N. N. Luzin asupra teoriei funcţiilor de variabilă complexă. Fiodorov V. S.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1953, 7, № 2, 41—48 (рум.)

Перевод из журнала «Успехи матем. наук», 1952, 7, № 2 (48), 7—16.

4410. Резюме диссертации Дюпюи об интерполировании в комплексной плоскости и его применениях в геодезии и картографии. Дюпюи (Résumé de la thèse de M. Dupuy sur l'interpolation complexe et ses applications en géodésie et cartographie. Dupuy M.), Bull. géod., 1953, № 29, 257—264 (франц.)

См. также: 4414, 4423, 4436, 4447, 4467, 4469, 4470, 4557

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4411. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе. Колмогоров А. Н., Докл. АН СССР, 1953, 93, № 5, 763—766

Рассматриваются динамические системы на двумерном торе T^2, определяемые в некоторой системе координат (координаты берутся по mod 2π) системой уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = B(x, y), \tag{1}$$

где A и B — аналитические функции, периодичные по каждому переменному с периодом 2π.

Предполагается, что система (1) обладает аналитическим интегральным инвариантом

$$I(g) = \iint\limits_g U(x, y)\, dx\, dy, \tag{1'}$$

причем всюду на T^2 выполнены условия $A^2 + B^2 > 0$, $U > 0$.

Формулируется следующая общая теорема, дополняющая известные результаты Пуанкаре, Данжуа и Кнезера (см., например, Немыцкий В. В.,

Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, изд. 2-е, М. — Л., 1949, гл. 2, § 2).

Теорема 1. Существует аналитическое преобразование координат тора T^2, которое приводит систему (1) к виду

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{F(x, y)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\gamma}{F(x, y)}, \tag{2}$$

а интегральный инвариант (1′) к виду

$$I(g) = \iint_{\sigma} F(x, y)\, dx\, dy, \tag{2′}$$

где γ — некоторая константа.

В дальнейшем рассматриваются системы вида (2) с иррациональным γ. Основные результаты формулируются в виде теорем 2—4.

Теорема 2. Если существуют такие $C > 0$ и $h > 0$, что при всех целых m и $n > 0$

$$|m - n\gamma| \geqslant Ch^n, \tag{4}$$

то существует аналитическое преобразование координат, которое переводит систему (2) в систему

$$\frac{du}{dt} = \lambda_1, \quad \frac{dv}{dt} = \lambda_2, \tag{3}$$

где λ_1, λ_2 — константы, причем $\lambda_2 = \gamma\lambda_1$, а интегральный инвариант (2′) приобретает вид

$$I(g) = K \iint_{g} du\, dv, \tag{3′}$$

где K — константа.

Как указывает автор, условие (4) выполняется (при надлежащем выборе C и h, зависящих от γ) для всех γ, кроме множества лебеговой меры нуль.

В случае применимости теоремы 2 динамическая система имеет дискретный спектр с собственными частотами $\lambda_{rs} = r\lambda_1 + s\lambda_2$, где r и s — целые числа, причем соответствующие собственные функции аналитичны.

Для иррациональных γ, не удовлетворяющих условию (4), имеется ряд других возможностей, полное обозрение которых дается теоремой 3.

Теорема 3. При надлежащем выборе иррационального γ и аналитической функции $F(x, y)$ возможен каждый из следующих случаев: 1) система (2) приводится к виду (3) бесконечно дифференцируемым, но не аналитическим преобразованием координат; 2) система (2) приводится к виду (3) k-кратно дифференцируемым, но не дифференцируемым $k+1$-кратно преобразованием; 3) приведение системы (2) к виду (3) возможно лишь при помощи всюду разрывного преобразования; 4) приведение системы (2) к виду (3) невозможно.

В случаях 1), 2), 3) система имеет дискретный спектр, но собственные функции оказываются, соответственно, не аналитическими, не дифференцируемыми $k+1$-кратно или всюду разрывными. Автор замечает, что в случае 4) спектр системы, повидимому, неизбежно непрерывен, т. е. для рассматриваемых динамических систем исключен случай смешанного спектра, а дискретный спектр имеет ровно две независимые частоты, но пока доказана только

Теорема 4. При надлежащем выборе иррационального γ и аналитической функции $F(x, y)$ спектр динамической системы (2) непрерывен.

Доказательства теорем 1—4 не приводятся, но в конце работы кратко указан основанный на применении рядов Фурье метод получения того преобразования координат, существование которого утверждалось в теореме 2 и в пунктах 1), 2), 3) теоремы 3. *М. И. Грабарь*

4412. Об устойчивости решений системы второго порядка в критических случаях. Красовский Н. Н., Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 6, 965—967

Исследуется устойчивость решений системы второго порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2) \quad (i = 1, 2) \quad X(0, 0) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

в случае, когда характеристическое уравнение

$$\left| \| a_{ij} \| - \lambda E \right| = 0, \quad a_{ij} = \left.\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right|_{x_1=0, x_2=0} \quad (i, j = 1, 2)$$

имеет один нулевой или два чисто мнимых корня.

Устанавливается, что асимптотическая устойчивость имеет место, если в некоторой окрестности начала координат (кроме самого начала координат) уравнение

$$\left| \left\| \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right\| - \lambda E \right| = 0$$

имеет корни с отрицательными вещественными частями. *А. А. Шестаков*

4413. Об устойчивости движения в целом при постоянно действующих возмущениях. Красовский Н. Н., Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 1, 95—102

Наряду с системой

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где $X_i(x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывные функции, обращающиеся в точке $x_1 = \ldots = x_n = 0$ в нуль, рассматривается система

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n) + R_i(x_1, \ldots, x_n, t), \tag{2}$$

где $R_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ — непрерывные функции.

Решение $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ системы (1) называется устойчивым в целом при постоянно действующих возмущениях, если оно устойчиво (в малом) при постоянно действующих возмущениях и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\eta(\varepsilon) > 0$, что всякое решение системы (2) обладает свойством $\overline{\lim}\, |x_i(t)| < \varepsilon$ при $t \to \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ при произвольных R_i, удовлетворяющих вне области $|x_i| < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ при всех $t \geqslant t_0$ неравенствам $|R_i(x_1, \ldots, x_n, t)| <$

$< \eta(\varepsilon) f(r) \left(r = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right)$. В дальнейшем принимается $f(r) = r$.

Рассматривается система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = f(\sigma), \quad \sigma = c_1 x - d_1 y, \quad (3)$$

где c_1, d_1 — постоянные, $c_1 \neq 0$, функции $F(x, y)$ и $f(\sigma)$ непрерывны и обращаются в нуль при $x = y = 0$. Обозначая $\varphi(\sigma, y) = c_1 F\left(\frac{\sigma + d_1 y}{c_1}, y\right) - d_1 f(\sigma)$, автор доказывает, что при выполнении условий

$$y\varphi(0, y) < 0, \quad \sigma f(\sigma) > 0, \quad \sigma[\varphi(\sigma, y) - \varphi(0, y)] < 0,$$

$$\left| \int_0^{\pm\infty} f(\sigma)\, d\sigma \right| = \infty, \quad \left| \int_0^{+\infty} \varphi(0, y)\, dy \right| = \infty$$

очевидное решение системы (3) будет асимптотически устойчиво в целом. Доказано также, что если $F(x, y)$ и $f(\sigma)$ имеют непрерывные и ограниченные частные производные 1-го порядка во всей плоскости xy и если действительные части корней уравнения

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} - \lambda, & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ограничены сверху отрицательным числом, то имеет место устойчивость в целом при постоянно действующих возмущениях.

Далее рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x) + ay, \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x) + by, \quad (4)$$

где a, b — постоянные, $a \neq 0$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ непрерывны, обращаются при $x = 0$ в нуль и удовлетворяют неравенствам $|f_i(z)| < M|z|$ $(i = 1,2)$; доказывается, что очевидное решение системы (4) устойчиво в целом при постоянно действующих возмущениях, если действительные части корней уравнения

$$\begin{vmatrix} x^{-1} f_1(x) - \lambda, & a \\ x^{-1} f_2(x), & b - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ограничены сверху отрицательным числом.

Аналогичный результат оказывается справедливым и для системы

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x) + ay, \quad \frac{dy}{dt} = bx + f_2(y).$$

Е. А. Барбашин

4414. Об обратных задачах теории фильтров и λ-зон устойчивости. Крейн М. Г., Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 5, 767—770

Изучается обратная задача для бесконечной струны S. Пусть $M(x)$ есть распределение масс на струне. Если струна совершает свободные колебания: $Y = y(x) \sin \sqrt{\lambda} t$ и функция $M(x)$ абсолютно непрерывна, то при единичном натяжении струны функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$y'' + \lambda \rho(x) y = 0 \quad \left(-\infty < x < \infty, \ \rho = \frac{dM}{dx} \right). \quad (1)$$

Обозначим через $\varphi(x; \lambda)$ и $\psi(x; \lambda)$ решения уравнения (1) при начальных условиях $y(0) = 1$, $y'(-0) = 0$ и $y(0) = 0$, $y'(-0) = 1$. Струна называется периодической, если $M(x+T) = M(x) + M(T)$. Струна называется симметричной, если $M(x) = -M(-x+0)$.

Теорема 1. Периодическая струна симметрична в том и только в том случае, когда $\varphi(T; \lambda) = \psi'(T \pm 0; \lambda)$.

Функцию

$$A(\lambda) = {}^1/_2 \{\varphi(T; \lambda) + \psi'(T - 0; \lambda)\}$$

автор называет Λ-функцией периодической струны.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ класс целых функций $A(\lambda)$ со следующими двумя свойствами:

1) $A(\lambda)$ разлагается в конечное или бесконечное произведение

$$A(\lambda) = \prod (1 - \lambda / a_j) \left(0 < a_1 < a_2 < \ldots; \sum (1/a_j) < \infty\right);$$

2) Все корни уравнения $A^2(\lambda) - 1 = 0$ неотрицательны.

Теорема 2. Для того чтобы целая функция $A(\lambda)$ была Λ-функцией некоторой периодической струны, необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала классу $\mathfrak{A}$.

Пусть $\mu_1 < \mu_2 < \ldots$ — все простые корни уравнения $A^2(\lambda) - 1 = 0$.

Целую функцию

$$R(\lambda) = \lambda \prod (1 - \lambda / \mu_j) \quad (2)$$

автор называет фильтрующей функцией периодической струны S.

Теорема 5. Для того чтобы целая функция $R(\lambda)$ вида (2) была фильтрующей функцией некоторой периодической струны, необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$A^2(\lambda) + R(\lambda) B^2(\lambda) = 1$$

допускало решение (A, B), состоящее из многочленов или целых функций нулевого рода с положительными корнями. *Б. М. Левитан*

4415. О числе предельных циклов дифференциального уравнения в окрестности особой точки. Трокоов Н. Ф., Матем. сб., 1954, **34**, № 1, 127—144

Работа посвящена изучению вопроса о максимальном числе предельных циклов, появляющихся в окрестности особой точки дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \left[\sum_{i+k=0}^{N} B_{ik} x^i y^k \right] \left[\sum_{i+k=0}^{N} A_{ik} x^i y^k \right]^{-1}$$

(N фиксированное)

при малых изменениях коэффициентов. Для случая $N = 2$ указанная задача решена в работе Н. Н. Баутина (Докл. АН СССР, 1939, **24**, № 7, 668—671).

При помощи методов А. М. Ляпунова и А. Пуанкаре построен пример дифференциального уравнения, имеющего при четном $N \geqslant 6$ $(N^2+5N-14)/2$, при нечетном $N \geqslant 7$ $(N^2+5N-26)/2$

предельных циклов, концентрически расположенных вокруг простой особой точки типа фокуса. *Е. А. Барбашин*

4416. О неосциллирующих линейных дифференциальных уравнениях. Хартман, Винтнер (On non-oscillatory linear differential equations. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1953, 75, № 4, 717—730 (англ.)

Исследуется дифференциальное уравнение

$$x'' + f(t)\,x = 0, \qquad (1)$$

где $f(t)$ — заданная непрерывная функция, и доказываются следующие утверждения:

1. Если $\int^{\infty} f(t)\,dt$ сходится, то дифференциальное уравнение (1) имеет решения $x = x(t)$ и $x = y(t)$, удовлетворяющие при $t \to \infty$ асимптотическим соотношениям $x(t) \sim H(t)$, $y(t) \sim \dfrac{G(t)}{H(t)}$ $\left(H(t) = \exp \int^{t} F(s)\,ds,\ G(t) = H^2(t) \int^{t} \dfrac{ds}{H^2(s)}\right)$, тогда и только тогда, когда

$$\int^{\infty} \frac{dt}{H^2(t)} = \infty, \text{ а } \int^{\infty} G(t)\,F^2(t)\,dt < \infty.$$

В этом случае имеют место также асимптотические формулы

$$\frac{x'}{x} = F + o(G^{-1}), \quad \frac{y'}{y} = F + (1 + o(1))\,G^{-1}.$$

2. Для того чтобы дифференциальное уравнение (1) имело решения $x = x(t)$ и $x = y(t)$, удовлетворяющие при $t \to \infty$ асимптотическим соотношениям $x'/x = o(1/t)$, $y'/y \sim (1/t)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{0 < s < \infty} \frac{\left| \int_t^{t+s} rf(r)\,dr \right|}{1 + \log\left(1 + \dfrac{s}{t}\right)} \to 0, \text{ когда } t \to \infty.$$

3. Если $\int^{\infty} t^{2p-1} |f(t)|^p dt < \infty$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, то дифференциальное уравнение (1) имеет решения $x = x(t)$ и $x = y(t)$, удовлетворяющие при $t \to \infty$ асимптотическим соотношениям $x \sim \exp \int^{t} sf(s)\,ds$, $y \sim t \exp\left(-\int^{t} sf(s)\,ds\right)$; $\dfrac{x'}{x} = o\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $\dfrac{y'}{y} \sim \dfrac{1}{t}$.

4. Для того чтобы дифференциальное уравнение (1) имело решение $x = x(t)$, удовлетворяющее при $t \to \infty$ асимптотическим соотношениям $x(t) \to 1$, $x'(t) = o(t^{-1})$, необходимо, чтобы $\int^{\infty} f(t)\,dt$ сходился и чтобы $\int_t^{\infty} f(s)\,ds = o(t^{-1})$ при $t \to \infty$.

Статья содержит также некоторые следствия из указанных выше утверждений и некоторые дополнительные замечания. *И. М. Рапопорт*

4417. Периодические решения ограниченной задачи трех тел, замыкающиеся лишь после многих оборотов. Мозер (Periodische Lösungen des restringierten Dreikörperproblems, die sich erst nach vielen Umläufen schließen. Moser Jürgen), Math. Ann., 1953, 126, № 4, 325—335 (нем.)

Рассматриваются периодические решения ограниченной задачи трех тел, дифференциальные уравнения которой во вращающейся системе координат записываются в канонической форме

$$\dot{x}_k = H_{y_k},\ \dot{y}_k = -H_{x_k}\ (k = 1,2), \qquad (1)$$

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - \frac{\mu}{((x_1 + \mu - 1)^2 + x_2^2)^{1/2}} - \frac{1-\mu}{((x_1 + \mu)^2 + x_2^2)^{1/2}},$$

где μ — малый параметр (возмущающая масса).

При $\mu = 0$ задача обращается в интегрируемую задачу двух тел, допускающую круговое решение

$$x_1 = \rho \cos \omega t,\ y_1 = -(\omega + 1)\,\rho \sin \omega t,$$
$$x_2 = \rho \sin \omega t,\quad y_2 = (\omega + 1)\,\rho \cos \omega t,\quad (\omega + 1)^2 \rho^3 = 1,\quad \omega \neq 0,$$

в окрестности которого автор ищет периодические решения при $\mu \neq 0$ с начальными условиями

$$x_1 = \xi_1(\mu),\ x_2 = 0,\quad y_1 = \eta_1(\mu),\ H = h(\mu),$$

где

$$\xi_1(0) = \rho,\ \eta_1(0) = 0,\ h(0) = -\frac{1}{2\rho} - (\omega + 1)\,\rho^2.$$

Пользуясь методом Пуанкаре аналитического продолжения периодических решений, автор показывает существование таких решений периода $\dfrac{2\pi}{\omega}$ при условии $\omega \neq \dfrac{1}{n}$ (Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, т. I, Gauthier — Villars, Paris, 1891).

Начальные условия

$$x_1 = \xi_1(\mu) + \rho x,\ x_2 = 0,$$
$$y_1 = \eta_1(\mu) + (\omega + 1)\,\rho y,\ H = h(\mu),$$

где x, y — произвольные малые параметры, определяют решение, пересекающее плоскость $x_2 = 0$ при $t = 0$ и при $t = T(x, y, \mu)$, причем $T(0, 0; \mu) = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Таким образом автор определяет преобразование $\mathfrak{A}$:

$$X = f(x, y; \mu),$$
$$Y = g(x, y; \mu),$$

где X, Y определяются из условий

$$x_1(T) = \xi_1(\mu) + \rho X,\ x_2(T) = 0,$$
$$y_1(T) = \eta_1(\mu) + (\omega + 1)\,\rho Y,\ H(T) = h(\mu).$$

Инвариантные точки преобразования $\mathfrak{A}^p$ ($p = 1,2,3,\ldots$) определяют искомые периодические решения задачи с периодом pT.

В силу каноничности системы (1) можно найти такую замену переменных

$$x = f_1(a, b; \mu),\ X = f_1(A, B; \mu),$$
$$y = g_1(a, b; \mu),\ Y = g_1(A, B; \mu),$$

в которых преобразование $\mathfrak{A}$ имеет так называемую нормальную форму

$$A = a\cos\chi + b\sin\chi + P(a, b),$$
$$B = -a\sin\chi + b\cos\chi + Q(a, b),$$
$$\chi = c_0 + c_1(a^2 + b^2) + \ldots,$$

где $P(a, b)$, $Q(a, b)$ сколь угодно высокого измерения относительно a, b (Birkhoff G. D., Acta math., 1920, 43, 1—119).

Согласно Биркгофу условие $c_1 \neq 0$ является достаточным для существования инвариантных точек $\mathfrak{A}^p$. Автор находит величину χ при $\mu = 0$ (пользуясь интегрируемостью системы (1) в этом случае) в следующем виде:

$$\chi = \frac{2\pi}{\omega} - \frac{3(\omega+1)}{\omega^3}\pi(a^2+b^2) + \ldots$$
$$\left(\omega \neq 0, \ \frac{3}{n}, \ \frac{4}{n}\right).$$

В силу непрерывности $\chi(\mu)$ при $\mu = 0$ существование искомых периодических решений периода pT ($p = 1, 2, \ldots$) тем самым установлено для достаточно малых μ.

Следует отметить, что существование аналогичных решений в общей задаче трех тел было показано еще Пуанкаре с помощью интегральных инвариантов (Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, т. III, Gauthier — Villars, Paris, 1899). *Г. А. Мерман*

4418. Поправка к работе «Периодические решения системы дифференциальных уравнений». Антосевич (Correction to the paper «Forced periodic solutions of systems of differential equations». Antosiewicz H. A.), Ann. Math., 1953, 58, № 3, 592 (англ.)

К РЖМат, 1953, 726.

4419 К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Том 1. Сансоне Дж. Пер. с итал., 346 стр., Изд-во иностр. лит-ры, М., 1953, 18 р. 40 к.

Первый том двухтомного издания, весьма богатого по своему содержанию, включающий, помимо прочего, ряд результатов, до сих пор фигурировавших только в журнальных статьях. Основное внимание уделяется общей теории, однако в некоторых случаях приводятся примеры, важные в приложениях. Приведены значительная по объему библиография и предметный указатель. Надо отметить, что некоторые отделы теории обкновенных дифференциальных уравнений, мало разрабатывавшиеся в Италии, освещены совершенно недостаточно (например, поведение интегральных кривых вблизи особой точки); соответственно и библиография односторонняя — в частности, почти не освещены работы наших отечественных математиков. В целом книга, с необходимыми добавлениями, будет служить очень полезным пособием при подготовке специалистов (в частности, аспирантов) в области теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Глава I «Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений и теорема существования для них» содержит общие свойства нормальных (разрешенных относительно производных) систем обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка в вещественной области. Помимо хорошо известного материала, в этой главе имеется интересный вывод свойств тригонометрических и эллиптических функций на основе рассмотрения дифференциальных уравнений, определяющих эти функции, а также доказательство Тонелли теоремы Пеано о существовании решения.

В главе II «Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений и некоторые преобразования линейных дифференциальных уравнений» переменные также считаются принимающими вещественные значения. После хорошо известных общих свойств решений таких систем показано применение матричного исчисления (метод Пеано—Бекера) для построения решения. При помощи рассмотрения дифференциальных семиинвариантов исследуется вопрос о различных видах, к которым может быть приведено линейное дифференциальное уравнение любого порядка в результате замены аргумента и линейной замены искомой функции. Наконец, в этой главе рассматриваются свойства решений сопряженных уравнений.

В главе III «Аналитическая теория дифференциальных уравнений и некоторые линейные уравнения второго порядка» основная теорема о существовании решения доказана при помощи метода мажорант и метода последовательных приближений; к линейным уравнениям применяется матричное исчисление. Имеется краткое исследование поведения решений в окрестности правильной особой точки для линейного уравнения 2-го порядка. Рассматриваются гипергеометрические функции и, в частности, гипергеометрические многочлены Якоби и их специальный случай — сферические и ультрасферические многочлены; приведены некоторые факты, связанные с разложением в ряд по таким многочленам. Излагается также ряд элементарных свойств функций Бесселя 1-го рода.

Большое внимание в книге уделено теории краевых задач. Глава IV «Краевые задачи для дифференциальных уравнений второго порядка» начинается с доказательства теоремы Валле-Пуссена о нахождении проходящего через n заданных точек решения дифференциального уравнения n-го порядка. Теоремы сравнения типа Штурма (для линейных уравнений 2-го порядка) доказываются на основании тождества Пиконе; полученные результаты иллюстрируются на примерах. Далее автор переходит к рассмотрению собственных значений и собственных функций для дифференциальных (линейных) операторов 2-го порядка и приводит ряд результатов, прежде всего Бохера и Маммана, о существовании собственных значений и о колебании собственных функций для общего случая, когда параметр λ нелинейно входит в уравнение и в граничное условие. Отсюда автор получает следствия для обычной задачи Штурма—Лиувилля и переходит, далее, к исследованию этой задачи. Асимптотические выражения для собственных значений и собственных функций дают возможность получить основную теорему о равносходимости ряда по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля и по обычной системе тригонометрических функций. Отметим, что случай бесконечного промежутка автором не затронут.

Глава V «Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка ($n > 2$)» начинается с рассмотрения общих линейных краевых задач для таких уравнений; в частности, приводятся основные свойства сопряженных задач. В дальнейшем введение функции Грина позволяет применить к рассматриваемым краевым задачам теорию интегральных уравнений. Рассматривается также экс-

тремальная теория собственных значений; в частности, приводятся исследования Пиконе по экстремальным свойствам собственных функций задачи Штурма — Лиувилля. В заключение приводятся исследования автора, посвященные доказательству существования собственных значений для краевой задачи специального вида, когда краевое условие задается в n точках.

Глава VI называется «Линейные дифференциальные уравнения и системы уравнений с периодическими коэффициентами. Периодические и почти периодические решения систем дифференциальных уравнений». После общих исследований, связанных с рассмотрением характеристической матрицы, автор переходит к методам вычисления характеристических показателей; приводятся исследования А. М. Ляпунова об уравнениях 2-го порядка и метод Хилла бесконечных определителей. На основе общих свойств самосопряженных систем 2-го порядка с периодическими краевыми условиями проводится рассмотрение свойств решений уравнения Матье. Далее рассматриваются основные свойства решений систем 1-го порядка с периодическими правыми частями, в частности, вопрос о зависимости периодического решения от параметра, входящего в эти правые части. Приводится ряд результатов, касающихся периодических решений дифференциального уравнения динамики точки.

В заключение, после формулировки основных свойств почти периодических функций, доказывается теорема Бора и Нейгебауера о почти периодичности ограниченного решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и почти периодической правой частью.

А. Д. Мышкис

4420 ☆. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Б е л м а н (Stability theory of differential equations. B e l l m a n R., XIII + 166 pp., New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1953, 5.50 doll.) (англ.)

Книга содержит 7 глав. Первая из них носит характер введения. В главе 2 «Устойчивость, ограниченность и асимптотическое поведение решений линейных систем» излагаются теоремы сравнения решений системы $\frac{dz}{dt} = (A + B(t))\,z$, где A и B — матрицы, с решениями системы $\frac{dz}{dt} = A(t)$ при различных предположениях относительно «малости» матрицы $B(t)$. Помимо уже известных теорем, приводятся и некоторые новые. Отметим, например, теорему 3. Рассмотрим систему

$$\frac{dz}{dt} = (A + B(t) + C(t))\,z, \qquad (1)$$

где: а) A — постоянная матрица, характеристические корни которой имеют неположительные действительные части, причем корни, имеющие нулевые действительные части, простые;

б) $B(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\int^{\infty} \left\| \frac{dB}{dt} \right\| dt < \infty$;

в) $\int^{\infty} \| C(t) \|\, dt < \infty$;

г) характеристические корни $A + B(t)$ имеют неположительные действительные части для $t \geqslant t_0$. При этих условиях все решения системы (1) ограничены при $t \to \infty$.

В этой же главе приводится ряд недавно опубликованных результатов Н. Левинсона.

Глава 3 «Существование и единственность решений нелинейных систем» содержит лишь хорошо известные результаты. В главе 4 «Устойчивость решений нелинейных дифференциальных уравнений» приводятся известные критерии асимптотической устойчивости. Полностью отсутствует изложение результатов русских работ по теории устойчивости, например, о прямом методе Ляпунова и о теории характеристических чисел вовсе не упомянуто.

В главе 5 «Асимптотическое поведение решений некоторых нелинейных уравнений первого порядка» разбираются уравнения

$$P(t, u, u') = \sum_{l+m+n \leqslant N} a_{lmn} t^l u^m (u')^n = 0,$$

где l, m, $n > 0$ и $l + m + n \leqslant N$, в частности, рассмотрен случай, когда

$$u' = \frac{P(u, t)}{Q(u, t)},$$

где P и Q — полиномы. Приводятся результаты мало известных работ Бутру и Фаулера, например, теорема 2 и теорема 4.

Т е о р е м а 2. Пусть $\varphi(t)$ — произвольная монотонно возрастающая функция t. Тогда существует иррациональное число α такое, что функция

$$u(t) = \frac{1}{2 - \cos t - \cos \alpha t}$$

является непрерывной для всех t, удовлетворяет уравнению типа $P(t, u, u', u'') = 0$ и удовлетворяет неравенству

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{u(t)}{\varphi(t)} \geqslant 1.$$

Т е о р е м а 4. Пусть u — некоторое решение полиномиального уравнения $P(t, u, u') = 0$, непрерывное для $t \geqslant t_0$. Тогда либо $u = o(t^b)$ для некоторого b, либо $u = \exp(at^b(1 + \varepsilon(t)))$, где a и b — некоторые константы, а $\varepsilon(t) \to 0$, когда $t \to \infty$. Приводятся также результаты исследования решений уравнения $u'' = \frac{P(u, t)}{Q(u, t)}$.

В главе 6 «Линейное дифференциальное уравнение второго порядка» излагаются основные результаты, касающиеся ограниченности и осциллаторности решений линейных уравнений второго порядка. Рассматриваются также условия интегрируемости квадрата решений на $[0, \infty]$. Приводится, например, такая интересная теорема:

Т е о р е м а 6. Если все решения уравнений $u'' + a(t)\,u = 0$ принадлежат $L^2(0, \infty)$, тогда все решения

$$u'' + (a(t) + b(t))\,u = 0$$

принадлежат $L^2(0, \infty)$, если $|b(t)| \leqslant c_1$, $t \geqslant 0$.

Интересна теорема 10 этой же главы:

Если

$$\varphi(t) \geqslant \frac{1}{4t^2} + \frac{1}{4t^2 \log^2 t} + \ldots$$

$$\ldots + (1+\varepsilon)\frac{1}{4t^2 \log^2 t \ldots \log_r^2 t},$$

где $r = 0, 1, 2, \ldots$, $t \geqslant t_0$ и $\varepsilon > 0$, тогда все решения уравнения $u'' + \varphi(t)\, u = 0$ осциллаторны. Как и в предыдущих главах, автор не учитывает русских работ.

В главе 7 «Уравнение Эмдена — Фаулера» рассматриваются вопросы асимптотического поведения решений уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(t^{\rho}\frac{du}{dt}\right) \pm t^{\sigma}u^{\eta} = 0.$$

Материал этой главы привлекает внимание читателей к мало известным результатам, касающимся асимптотического поведения решений этого уравнения, важного для физики.

В конце каждой главы в виде упражнений дополнительно содержится много интересных фактов качественной теории. *В. В. Немыцкий*

4421 РЖ. Сборник статей по теории нелинейных колебаний. Том 2 (Contributions à la théorie des oscillationsnon linéaires. Vol. 2, édité par Solomon Lefschetz, V+116 pp., Princeton University Press, 1952) [**Рецензия**: **Хаг** (Haag Jules), Bull. sci. math., 1953, сер. 2, **127**, juillet-août, 109—113 (франц.)]

Сборник содержит следующие статьи: 1) Уравнение Ван-дер-Поля для релаксационных колебаний. Картрайт (Cartwright I. M. L.). Изучается уравнение $x'' - kx'(1-x^2) + x = 0$ для больших значений k. 2. Возмущение линейных систем с постоянными коэффициентами, имеющих периодическое решение. Коддингтон, Левинсон (Coddington E. A., Levinson N.). Изучается система $x' = Ax + \mu f(x, t, \mu)$, где A — постоянная матрица, функция f периодическая по t с периодом 2π. Рассматривается также и случай, когда правые части системы не зависят от t. Устанавливаются условия существования периодических решений для $\mu \neq 0$. 3. Диналшческие системы с устойчивой структурой. Баггис (Baggis H. F. de). Приводятся доказательства известных теорем А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина о грубых системах. 4. Замечания о дифференциальных уравнениях. Лефшец (Lefschetz S.). Статья состоит из двух частей: в первой автор дает классификацию поведения интегральных кривых системы двух дифференциальных уравнений, исходя из поведения кривой $r\frac{dr}{dt} = 0\,(r = \sqrt{x^2+y^2})$; во второй рассматривается уравнение Ван-дер-Поля. 5. Метод вычисления предельных циклов при помощи последовательных приближений. Мак-Карти (McCarthy J.). Рассматривается вопрос о получении методом последовательных приближений периодического решения системы

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

6. Асимптотические разложения решений систем линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр. Территтин (Turrittin H. L.). Изучаются системы вида

$$\varepsilon^h X' = A(t, \varepsilon)\, X$$

в области $a \leqslant t \leqslant b$, $0 \leqslant |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_1$; h — целое неотрицательное число; ε — малый комплексный параметр. $A(t, \varepsilon)$ — матрица, имеющая асимптотическое разложение

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t).$$

Решения ищутся в форме асимптотических разложений. *В. В. Немыцкий*

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

4422. Краевые задачи. I, II, III. Лион (Problèmes aux limites. I, II, III. Lions Jacques-Louis), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 25, 2373—2375; № 26, 2470—2472; **237**, № 1, 12—14 (франц.)

Первая заметка содержит обобщенную формулировку некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа, относительно которых автор доказывает существование решения и единственность.

Задача ставится как задача отыскания функции u, удовлетворяющей уравнению

$$Du + Mu = f; \qquad D = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g_{ij}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right),$$

где D — самосопряженный эллиптический оператор с коэффициентами из L^{∞}, имеющими производные 1-го порядка, интегрируемые с квадратом, M — функция из L^{∞}, а f интегрируема в L^2.

Граничное условие для u заключается в том, что для $h - u$ справедливо преобразование

$$\int_{\Omega} D(h-u)\, v\, d\Omega = \int_{\Omega} \sum g_{ij}\frac{\partial (h-u)}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, d\Omega,$$

где v принадлежит некоторому подпространству из $W_2^{(1)}$, обозначаемому автором как $\mathcal{E}_{L^2}^1$. Автор указывает очень много всевозможных обобщений своей теории.

Вторая заметка содержит формулировки некоторых теорем вложения, аналогичных изложенным в книге референта (Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во ЛГУ, Л.,1950),и указывает некоторые условия на области, достаточные для справедливости в них теорем вложения.

Приведена также без ссылки на автора теорема о полной непрерывности оператора вложения, принадлежащая Кондрашову. В качестве примера на приложения этих теорем указывается на несколько задач, разобранных в первой заметке, которые удается при этом еще обобщить в новых функциональных пространствах.

Третья заметка содержит результаты, касающиеся нахождения решений гиперболических и параболических уравнений в пространствах функционалов по t и гильбертовом пространстве по $x_l - x_k$. Автор приводит теорию обобщенных решений смешанных задач в пространстве функционалов. Он устанавли-

вает существование и единственность таких решений, которые при $t<0$ принимают значения, равные нулю.

Результаты заметок примыкают к тем, которые изложены в упомянутой книге С. Л. Соболева, а также к результатам М. И. Вишика. Автор не всегда аккуратно ссылается на результаты, опубликованные ранее. *С. Л. Соболев*

4423. Некоторые координатные системы, связанные с эллиптическими функциями. Мун, Спенсер (Some coordinate systems associated with elliptic functions. Moon Parry, Spencer Domina Eberle), J. Franklin Inst., 1953, 255, № 6, 531—543 (англ.)

Дается преобразование уравнений Лапласа $\Delta\varphi=0$ и Гельмгольтца $\Delta\varphi+k^2\varphi=0$, написанных для плоскости и для осесимметричного случая, к новым переменным u, v, связанным с переменными x, y уравнением $x+iy=F(u+iv)$, причем F есть одна из следующих эллиптических функций:

$$c\,\mathrm{sn}\,(u+iv),\quad c\,\mathrm{cn}\,(u+iv),\quad [c\,\mathrm{sn}\,(u+iv)+ia]^{-1}+\frac{i}{2a};$$

$$\frac{2c}{\pi}\ln\mathrm{cn}\,(u+iv),\quad \frac{c}{\pi}\left[\ln\frac{1}{k}-2\ln\mathrm{sn}\,(u+iv)\right],$$

$$\frac{2Kc}{\pi}Z(u+iv+iK')+ic.$$

Указывается, в каких случаях возможно рассматриваемые уравнения, написанные в переменных u, v, решать путем разделения переменных. Отмечаются возможные применения изложенных преобразований к решению задач электростатики. *Л. Н. Сретенский*

4424. О системах эллиптических дифференциальных уравнений и об общих краевых задачах. Вишик (Despre sistemele de ecuatii diferentiale eliptice si despre problemele la limita generale. Vişic M. I.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1954, № 1, 122—129 (рум.)

Перевод статьи из журнала «Успехи матем. наук», 1953, 8, № 1, 122—129.

4425. О фундаментальном решении параболического уравнения в римановом пространстве. Иосида (On the fundamental solution of the parabolic equation in a riemannian space. Yosida Kôsaku), Osaka Math. J., 1953, 5, № 1, 65—74 (англ.)

Пусть R — связная область бесконечно дифференцируемого m-мерного риманова пространства с метрикой $ds^2=g_{ij}(x)\,dx^i\,dx^j$ (в обозначениях применяется обычное правило суммирования по повторяющимся индексам). Рассматривается общий параболический оператор

$$L_{tx}f\equiv\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}-g(x)^{-1/2}\times$$

$$\times\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x^j}(g(x)^{1/2}a^{ij}(t,x)f(t,x))+g(x)^{-1/2}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial x^i}(g(x)^{1/2}b^i(t,x)f(t,x))-c(t,x)f(t,x)$$

$$(g(x)=\det(g_{ij}(x)),\qquad(1)$$

где $a^{ij}(t,x)\xi_i\xi_j>0$, если $\sum_i(\xi_i)^2>0$, причем коэффициенты a^{ij}, b^i при замене локальных координат $(x^1,\ldots,x^m)$ меняются по естественным законам, вытекающим из требования инвариантности L_{tx}; коэффициенты $a^{ij}(t,x)$, $b^i(t,x)$ и $c(t,x)$ считаются для простоты бесконечно дифференцируемыми. Цель работы — построение фундаментального решения для оператора (1). Для этого сначала строится так называемый «параметрикс» для сопряженного оператора

$$L'_{sy}h\equiv-\frac{\partial h(s,y)}{\partial s}-a^{ij}(s,y)\frac{\partial^2h(s,y)}{\partial y^i\partial y^j}-$$

$$-b^i(s,y)\frac{\partial h(s,y)}{\partial y}-c(s,y)h(s,y),$$

т. е. функция $H_1(\tau,t,y,x)\,(t>\tau)$, имеющая вид

$$H_1(\tau,t,y,x)=(t-\tau)^{-m/2}\exp\left(-\frac{r^2(\tau,y,x)}{4(t-\tau)}\right)\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{k}u_i(\tau,y,x)(t-\tau)^i,$$

где k — какое-либо натуральное число $>2+m/2$, $r(\tau,y,x)$ — минимальное расстояние между x и y на R в метрике $dr(\tau)^2=a_{ij}(\tau,x)\,dx^i dx^j$, $u_i(\tau,y,x)$ — бесконечно дифференцируемые функции в окрестности $y=x$, причем $u_0(\tau,x,x)=1$, а

$$L'_{\tau y}H_1(\tau,t,y,x)=(t-\tau)^{k-m/2}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{r^2(\tau,y,x)}{4(t-\tau)}\right)c_k(\tau,y,x),$$

где $c_k(\tau,y,x)$ — бесконечно дифференцируема в окрестности $y=x$. Далее на коэффициенты $g_{ij}(x)$, $a^{ij}(t,x)$, $b^i(t,x)$ и $c(t,x)$ накладывается следующее дополнительное условие.

Существует константа $\eta>0$ такая, что если обозначить чёрез $\delta(S)$ $(S\geqslant0)$ бесконечно дифференцируемую функцию, для которой $\delta(S)=1$ $(0\leqslant S<\eta)$, $\delta(S)\geqslant0$ $(\eta\leqslant S\leqslant2\eta)$, $\delta(S)=0$ $(S\geqslant2\eta)$, а через $S(x,y)$ — расстояние между $x\in R$ и $y\in R$ в исходной метрике, то функция

$$H(s,t,y,x)=\pi^{-m/2}(a(t,x)\,|\,g(x))^{1/2}\times$$

$$\times H_1(s,t,y,x)\,\delta(S(x,y))\quad(a(t,x)=(\det a^{ij}(t,x))^{-1})$$

определена всюду, причем интеграл $\int\limits_R|H(s,t,y,x)|dx$ ограничен по y, если s и $t\,(>s)$ ограничены; функция $K(s,t,y,x)=L'_{sy}H(s,t,y,x)$ ограничена всюду, если s и $t\,(>s)$ ограничены; интеграл $\int\limits_{S(x,y)\leqslant2\eta}dy$ ограничен по x.

Аналогичное условие накладывается на параметрикс для оператора (1), причем указывается, что если R компактно, то оба эти условия наверное выполняются. Если эти условия имеют место, то функция

$$P(s,t,y,x)=H(s,t,y,x)-$$

$$-\int_s^t d\tau\int_R H(s,\tau,y,z)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}K_n(\tau,t,z,x)\,dz,$$

где

$$K_1 = K,\ K_n(s, t, y, x) =$$

$$= \int_s^t d\tau \int_R K(s, \tau, y, z)\, K_{n-1}(\tau, t, z, x)\, dz \ (n = 2, 3, \ldots),$$

и служит фундаментальным решением для оператора (1). Оно обладает следующими свойствами: $L'_{sy} P = 0$, $L_{tx} P = 0$ $(s < t)$; если $t \downarrow s_0$, $s \uparrow s_0$, $S(x, x_0) + S(y, x_0) \to 0$, то $P(s, t, y, x)$ имеет особенность вида

$$\pi^{-m/2} (a(s_0, x_0) / g(x_0))^{1/2} (t - s)^{-m/2} \times$$

$$\times \exp(-a_{ij}(s_0, x_0)(x^i - y^i)(x^j - y^j) 4^{-1} (t - s)^{-1})$$

(где $a_{ij} a^{jk} = \delta_i^k$); $P(s, t, y, x)$ для любого $\varepsilon > 0$ и фиксированного $x(y)$ ограничена по $y(x)$, если s и $t\ (> s + \varepsilon)$ ограничены; $\int_R |P(s, t, y, x)|\, dx$, где $dx = g(x)^{1/2} dx^1 \ldots dx^m$, ограничен по y, если s и $t\ (> s)$ ограничены; $\int_R P(s, t, y, x) = 1$ при $c(t, x) \equiv 0$; имеет место соотношение

$$P(s, t, y, x) = \int_R P(s, u, y, z)\, P(u, t, z, x)\, dz \ (s < u < t);$$

если $c(t, x) \equiv 0$, а R компактно, то $P(s, t, y, x) \geqslant 0$.

Отметим, что при доказательстве используется попутно полученная теорема единственности: если для $t \geqslant s$ функция $f(t, x)$ непрерывна, удовлетворяет уравнению $L_{tx} f = 0\ (t > s)$, а $f(s, x) = 0$ $(x \in R)$ и интеграл $\int_R |f(t, x)|\, dx$ ограничен для ограниченного $t\ (> s)$, то $f(t, x) \equiv 0$; при этом условие ограниченности интеграла может быть заменено на условие ограниченности $\sup_x f(t, x)$.

А. Д. Мышкис

4426. Фундаментальное решение параболического уравнения в дифференцируемом многообразии. Ито (The fundamental solution of the parabolic equation in a differentiable manifold. Itô Seizô), Osaka Math. J., 1953, 5, № 1, 75—92 (англ.)

Построение Феллера (Feller W., Math. Ann., 1936, **113**, 113—160) и Дресселя (Dressel F. G., Duke Math. J., 1940, **7**, 186—203; 1946, **13**, 61—70) фундаментального решения параболического дифференциального уравнения обобщается на случай уравнений, заданных в дифференцируемом m-мерном многообразии. Пусть M — такое многообразие; предполагается, что при замене локальных координат формулы преобразования имеют вторые производные, удовлетворяющие условию Гёльдера. Координаты выбираются каноническим образом в смысле одной из предыдущих работ автора (Nagoya Math. J., 1950, **1**, 35—47). Изучаемый оператор имеет вид

$$L_{tx} \equiv a^{ij}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} +$$

$$+ b^i(t, x) \frac{\partial}{\partial x^i} + c(t, x) - \frac{\partial}{\partial t} \quad (x \in M,\ s_0 < t < t_0),$$

где матрица $\| a^{ij}(t, x) \|$ симметрична и положительно определена, а коэффициенты $a^{ij}(t, x)$, $b^i(t, x)$ и $c(t, x)$ удовлетворяют определенным условиям гладкости и ограниченности. Для определения сопряженного оператора выбираем произвольно $s_1 \in (s_0, t_0)$ и полагаем

$$L^*_{tx} \equiv \frac{1}{\sqrt{(ax)}} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} a^{ij}(t, x) \sqrt{a(x)} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{a(x)}} \frac{\partial}{\partial x^i} b^i(t, x) \sqrt{a(x)} + c(t, x) + \frac{\partial}{\partial t}$$

$$(a(x) = \det^{-1} \| a^{ij}(s_1, x) \|).$$

Функция $u(t, x; s, y)$ $(s_0 < s < t < t_0;\ x, y \in M)$ называется фундаментальным решением уравнения $Lf = 0$, если для любого s и любой функции $f(x)$, равномерно непрерывной и ограниченной на M, функция

$$f(t, x) = \int_M u(t, x; s, y) f(y)\, d_a y$$

$$(d_a y = \sqrt{a(y)}\, dy^1 \ldots dy^m) \qquad (1)$$

вместе со своей производной по t ограничена на $(s', t') \times M$ для любых s', t' $(s < s' < t' < t_0)$ и удовлетворяет условиям

$$Lf(t, x) = 0 \quad (s < t < t_0,\ x \in M), \qquad (2)$$

$$\lim_{t \downarrow s} f(t, x) = f(x) \text{ (равномерно на } M). \qquad (3)$$

Аналогично дается определение фундаментального решения u^* уравнения $L^* f = 0$, однако здесь функция $f(x)$ считается непрерывной и суммируемой на M, а сходимость

$$f^*(s, y) = \int_N u^*(s, y; t, x) f(x)\, d_a x \underset{s \uparrow t}{\longrightarrow} f(y)$$

понимается как сходимость при каждом $y \in M$ и в смысле $L^1(M)$; ограниченность f^* и $\frac{\partial f^*}{\partial s}$ также предполагается в среднем по y.

Доказано существование единственного фундаментального решения $u(t, x; s, y)$ уравнения $Lf = 0$, удовлетворяющего необходимым условиям гладкости, для которого $u^*(s, y; t, x) = u(t, x; s, y)$ служит фундаментальным решением уравнения $L^* f = 0$. Это решение обладает следующими свойствами:

$$L_{tx} u(t, x; s, y) = 0, \quad L^*_{sy} u(t, x; s, y) = 0;$$

$$\int_M u(t, x; \tau, \xi)\, u(\tau, \xi; s, y)\, d_a \xi = u(t, x; s, y)$$

$$(s < \tau < t);$$

если $c(t, x) \leqslant 0$, то $u(t, x; s, y) > 0$;

если $c(t, x) \equiv 0$, то $\int_M u(t, x; s, y)\, d_a y = 1$.

Если функция $f(t, x)$ $(s < t < t_0,\ x \in M)$ удовлетворяет условиям (2) и (3), а также условиям ограниченности вместе с $\frac{\partial f}{\partial t}$, сформулированным выше, а $f(x)$ непрерывна и ограничена на M, то $f(t, x)$ представима в виде (1); аналогичными

свойствами (но с изменениями, подобными сформулированным выше) обладает решение $u^*(s, y; t, x)$. В случае, когда M — риманово пространство, результаты данной работы тесно связаны с результатами Йосида (см. реф. 4425). Как и в той работе, построение фундаментального решения осуществляется при помощи «параметрикса», который, правда, здесь конструируется несколько иначе, но играет аналогичную роль. *А. Д. Мышкис*

4427. Принцип Дирихле и обобщенные граничные значения. Хаусснер (Dirichlet's principle and generalized boundary values. Hausner Melvin), Ann. Math., 1953, сер. 2, 57, № 3, 475—489 (англ.)

Изучаются векторные операции на римановом многообразии в плане, близком к известной статье Вейля по ортогональным проекциям (Weyl H., Duke Math. J., 1940, 7, 411—444). Приведем основные определения, используя обычные тензорные обозначения (см., например, Hodge W., The theory and applications of harmonic integrals, Cambridge, 1941, гл. 2, 3). Пусть R — n-мерное риманово многообразие с ковариантным метрическим тензором g_{ij}, $x = (x^1, \ldots, x^n) \in R$; выражение

$$\alpha = (r!)^{-1} \alpha_{i_1 \ldots i_r} \, dx^{i_1} \ldots dx^{i_r} \quad (r = 0, \ldots, n),$$

где $\alpha_{i_1 \ldots i_r}$ — ковариантный кососимметричный тензор, называется r-формой (при $r = 0$, $\alpha = \alpha(x)$). Двойственной формой $^*\alpha$ называют $(n-r)$-форму с коэффициентами

$$^*\alpha_{i_1 \ldots i_{n-r}} = (r!)^{-1} \sqrt{g} \; g^{j_1 k_1} \ldots g^{j_r k_r} \times$$

$$\times \alpha_{k_1 \ldots k^r} \, \delta^{1 \ldots n}_{j_1 \ldots j_r \, i_1 \ldots i_{n-r}},$$

внешний дифференциал $d\alpha$ определяется как $(r+1)$-форма с коэффициентами

$$(d\alpha)_{i_1 \ldots i_r + 1} = \sum_{k=1}^{r+1} (-1)^{k-1} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \alpha_{i_1 \ldots i_{k-1} \, i_{k+1} \ldots i_{r+1}}.$$

Положим $\delta\alpha = (-1)^{k*}(d^*\alpha)$, $k = nr + n + 1$; $\delta\alpha$ является $(r-1)$-формой. В случае трехмерного евклидова пространства при $r = 0$ $d\alpha = (\operatorname{grad} \alpha, d\boldsymbol{r})$, $\delta\alpha = 0$; при $r = 1$ $d\alpha = (\operatorname{rot} \alpha, d\sigma)$, $\delta\alpha = -\operatorname{div} \alpha$. Автор вводит в рассмотрение вещественное гильбертово пространство $L_2(r) = L_2$, составленное из r-форм $\alpha, \beta, \ldots$, со скалярным произведением

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} \int \alpha_{i_1 \ldots i_r} \beta_{i_1 \ldots i_r} \, dx^1 \ldots dx^n$$

и с естественными операциями сложения и умножения на скаляр. Обозначим (обозначения референта) через ODF $(O\Delta F)$ и LDF $(L\Delta F)$ подпространства L_2, первое из которых является замыканием совокупности r-форм вида $\alpha = d\beta$ $(\alpha = \delta\beta)$, где β финитны (т. е. аннулируются вне компактов, лежащих внутри R), а второе — замыканием финитных r-форм α, для которых $d\alpha = 0$ $(\delta\alpha = 0)$. Через $OD1$ $(O\Delta 1)$ и $LD1$ $(L\Delta 1)$ обозначим подпространства L_2, состоящие: первое — из форм, являющихся пределами на каждом компакте $R' \subset R$ (в смысле соответствующего L_2) r-форм вида $\alpha = d\beta$ $(\alpha = \delta\beta)$, где β определена в некоторой окрестности R'; второе — из форм, являющихся подобными пределами r-форм α, для которых $d\alpha = 0$ $(\delta\alpha = 0)$. Устанавливается, что ортогональным дополнением к каждому из этих подпространств будет опять одно из рассматриваемых подпространств; при этом для получения ортогонального дополнения следует в обозначении подпространства заменить L на O, D на Δ, F на 1 и наоборот (например, $\perp ODF = L\Delta 1$). Отсюда находятся разложения L_2 и этих подпространств в ортогональные суммы, обобщающие разложения Вейля (см. цитированную статью).

В дальнейшем автор переходит к исследованию некоторых граничных задач. r-форма α называется гармонической, если $d\alpha = \delta\alpha = 0$; если дополнительно $\alpha \in L_2$, то $\alpha \in LD1 \cap L\Delta 1$, и наоборот. По определению r-формы α, $\beta \in L\Delta 1$ имеют одинаковые нормальные компоненты на границе R, если $\alpha - \beta \in L\Delta F$. Две r-формы α, $\beta \in LD1$ имеют одинаковые периоды, если для каждого дифференцируемого и компактного r-цикла B

$$\int_B H(\alpha) = \int_B H(\beta),$$

где $H(\gamma)$ обозначает проекцию $\gamma \in LD1$ на $LD1 \cap L\Delta F$ в разложении $LD1 = OD1 \oplus LD1 \cap L\Delta F$. Доказывается, что для любых $\alpha \in LD1$ и $\beta \in L\Delta 1$ существует одна и только одна гармоническая форма $\gamma \in L_2$, имеющая одинаковые периоды с α и одинаковые нормальные компоненты на границе R с β.

Приведен также ряд близких результатов; некоторые из перечисленных фактов справедливы не только в L_2, но и в аналогах L_p. Работа написана весьма сжато, во многих случаях доказательства лишь намечены. Широко используется метод усреднения; для возможности его применения во всей работе на R наложены некоторые ограничения. Статья близко примыкает к работе М. И. Вишика (Матем. сб., 1949, 25 (67), № 2, 189—234), которая, повидимому, осталась неизвестной автору. *Ю. М. Березанский*

4428. Применение в случае куба метода вычисления по избытку и недостатку электростатической емкости проводника. Дабони (Applicazione al caso del cubo di un metodo per il calcolo per eccesso e per difetto della capacità elettrostatica di un conduttore. Daboni Luciano), Atti. Accad. naz. Lincei Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, 14, № 4, 461—466 (итал.)

Получены оценки сверху и снизу для емкости $C(a)$ куба с ребром a. Наилучшая из полученных оценок: $0{,}654\, a < C(a) < 0{,}676\, a$. Для получения оценок доказывается теорема: Пусть Γ — замкнутое множество и B — какое-либо борелево множество, $B \subset \Gamma$. Пусть $\alpha(E)$ — вполне аддитивная функция борелевых множеств $E \subset B$ такая, что потенциал $u(P) = \int_B |PQ|^{-1} d_Q \alpha$ является непрерывной положительной функцией в замыкании дополнения Γ. Тогда имеет место неравенство

$$\frac{\alpha(B)}{\max\limits_{F\Gamma} u(P)} \leqslant C(\Gamma) \leqslant \frac{\alpha(B)}{\min\limits_{F\Gamma} u(P)},$$

где $C(\Gamma)$ — емкость Γ и $F\Gamma$ — граница Γ.

Для получения наилучшей оценки выбрано: Γ — куб с ребром единица, $B = B_1 + B_2$, где $B_1 = F\Gamma$, B_2 — совокупность всех ребер куба Γ с длиной ребра 0,98, концентрического и подобно расположенного с Γ. Пусть $u_1(P)$ — потенциал простого слоя с плотностью единица на $F\Gamma$, $u_2(P)$ — потенциал с линейной плотностью единица на B_2, $u_3(P) = \sum |Q_i P|^{-1}$, где Q_i — вершина куба Γ. Полагая

$$u(P) = k_1 u_1(P) + k_2 u_2(P) + k_3 u_3(P),$$

выбирают k_1, k_2, k_3 так, чтобы $\sum |u(P_j) - 1|^2 = \min$, где P_j — вершины квадратов, полученных делением каждой грани куба Γ на 100 равных квадратов. При таком выборе оказывается: $0{,}98 < u(P) < 1{,}013$ ($P \in F\Gamma$) и $\alpha(B) = 0{,}6627$, что приводит к указанной оценке. Приведенные оценки лучше полученных другими авторами, на статьи которых имеются ссылки в реферируемой работе.

Имеется опечатка: на стр. 462 напечатано $0{,}645a < C$, должно быть $0{,}654a < C$.

Х. Л. Смолицкий

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

4429. К приближенному исследованию автоколебаний и вынужденных колебаний нелинейных систем. Попов Е. П., Докл. АН СССР, 1954, 95, № 5, 943—946

Метод гармонического баланса (Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н., Введение в нелинейную механику, Изд-во АН УССР, Киев, 1937) в теории автоматического регулирования чаще всего применяют для определения периодических решений уравнения

$$Q(p)\,x_1 = R(p)\,x_2 + P(p)\,c_0 \sin \omega_0 t, \qquad (1)$$
$$x_2 = f(x_1) \qquad \left(p \equiv \frac{d}{dt}\right),$$

где Q, R и P — полиномы с действительными коэффициентами, c_0 и ω_0 — положительные числа.

В реферируемой заметке этим же методом определяются периодические решения уравнений более общего вида

$$Q(p)\,x_1 = R(p)\,x_2 + P(p)\,c_0 \sin \omega_0 t,$$
$$F(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) = 0 \qquad (2)$$

при некоторых, наиболее часто встречающихся видах функции F.

При помощи рассуждений, обычных для метода гармонического баланса, получаются два уравнения $X(a, \omega) = 0$ и $Y(a, \omega) = 0$ для определения значений a и ω решения $x = a \sin \omega t$ в случае $c_0 = 0$, а также два уравнения $X(a, \varphi) = 0$ и $Y(a, \varphi) = 0$ для определения a и φ периодического решения $x = a \sin(\omega_0 t + \varphi)$ при $c_0 \neq 0$.

В качестве приближенного критерия устойчивости периодических режимов приводится неравенство $\left(\frac{\partial X}{\partial a}\right)^0 \left(\frac{\partial Y}{\partial \widetilde{\omega}}\right)^0 - \left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right)^0 \left(\frac{\partial X}{\partial \widetilde{\omega}}\right)^0 > 0$ либо предлагается определять условия устойчивости, заменяя в уравнении первого приближения возмущенного движения периодические коэффициенты постоянными, осреднял их за период.

Таким образом, метод гармонического баланса, разработанный и обоснованный для систем, близких к линейным, имеющим порождающее периодическое решение, применяется в реферируемой заметке к уравнениям, не удовлетворяющим этому условию. Автор указывает, что в задачах теории регулирования это часто допустимо, так как из физических соображений (благодаря фильтрующим свойствам линейной части рассматриваемой системы) можно постулировать близость колебаний к гармоническим, даже если система не близка к линейной, имеющей порождающее периодическое решение.

Эти соображения, обычные для теории регулирования, оправдывают часто применение метода гармонического баланса к системам не близким к линейным, имеющим порождающее периодическое решение, если ограничиваются определением периодических решений. Они не достаточны для обоснования применения метода гармонического баланса в этих же случаях, если определяются также и условия устойчивости (хотя бы локальной) найденных периодических решений. При исследовании устойчивости существенна не только близость колебаний к гармоническим, но и медленное изменение амплитуды и фазы колебания за период в процессе установления. Это условие может быть не удовлетворено, как бы не были близки к гармоническим найденные периодические решения. Поэтому применение метода гармонического баланса к исследованию устойчивости периодических решений уравнения (2) требует значительно более жестких ограничений, чем это сделано в реферируемой заметке. *М. А. Айзерман*

4430. Об асимптотических решениях для теплопередачи при переменной температуре стенки в ламинарном пограничном слое с профилем скоростей Хартри. Шу (On asymptotic solutions for the heat transfer at varying wall temperatures in a laminar boundary layer with Hartree's velocity profiles. Schuh H.), J. Aeronaut. Sci., 1953, 20, № 2, 146—147 (англ.)

При некоторых предположениях рассматриваемая задача сводится к решению уравнения

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \frac{\sigma b}{2}\eta^2 \frac{d\theta}{d\eta} - n\sigma b(2-\beta)\eta\theta = 0$$

с краевыми условиями $\theta(0) = 1$, $\theta(\infty) = 0$ (здесь θ и η — безразмерные температура и координата; σ, b, n, β — постоянные).

Для исследования случая, когда n велико, автор делает замену $\zeta = n^{1/3}\eta$. Тогда

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} + \frac{\sigma}{n}\frac{b}{2}\zeta^2 \frac{d\theta}{d\zeta} - \sigma b(2-\beta)\zeta\theta = 0.$$

Пренебрегая средним членом, получим уравнение, решение которого выражается через функции Бесселя от мнимого аргумента (Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1952, Часть III, уравнение 2.162(10)). Значения, сосчитанные по асимптотической формуле, сравниваются с результатами численного интегрирования.

Для исследования случая, когда σ велико,

предлагается ввести независимую переменную $\xi = \sigma^{1/3} b^{1/3} \eta$. Получим уравнение

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{\xi^2}{2}\frac{d\theta}{d\xi} - \varepsilon\xi\theta = 0,$$

где параметр $\varepsilon = n(2-\beta)$. Однако решения в замкнутой форме автор не нашел.

Примечание референта. Последнее уравнение может быть решено при помощи функций Уиттекера. Действительно, замена переменных $x = \xi^3/6$, $y = \xi\theta \exp(x/2)$ переводит это уравнение в уравнение Уиттекера (см. предыдущую ссылку, уравнение 2.273)

$$4x^2y'' = (x^2 - 4kx + 4m^2 - 1)\,y,$$

где $m = 1/6$; $k = -(1+2\varepsilon)/3$.

Решение, удовлетворяющее краевым условиям,

$$y = \frac{6^{1/3}\,\Gamma(2/3-k)}{\Gamma(1/3)}\,W_{k,\,m}(x).$$

И. М. Соболь

4431. О периоде колебаний нелинейных систем с несколькими степенями свободы. Граффи (Sur la période d'oscillation des systèmes non linéaires à plusieurs degrés de liberté. Sul periodo delle oscillazioni nei sistemi non-lineari a più gradi di libertà. Graffi Dario), Actes Colloq. internat. vibrations non linéaires, Ile de Porquerolles, 1951, 189—193, 194, Publ. sci. tech. Ministère de l'air, № 281, Paris, 1953 (франц., итал.)

Автор рассматривает две индуктивно связанные электрические цепи, токи в которых i_1 и i_2 удовлетворяют системе

$$L_1\frac{d^2i_1}{dt^2} + M\frac{d^2i_2}{dt^2} + f_1(i_1)\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{c_1} = 0,$$

$$M\frac{d^2i_1}{dt^2} + L_2\frac{d^2i_2}{dt^2} + f_2(i_2)\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{c_2} = 0$$

с нелинейными сопротивлениями $f_1(i_1)$, $f_2(i_2)$. Доказывается, что если эта система имеет периодическое решение, то его период не меньше, чем наименьший из периодов соответствующей линейной системы, получаемой подстановкой $f_1(i_1) = f_2(i_2) \equiv 0$.

Автор утверждает, что распространение рассуждения на случай n степеней свободы, так же как и на цепи с емкостной связью, не доставляет каких-нибудь новых трудностей. *W. Wasow*

Перевод из Math. Rev., 1954, **15**, № 2, 127.

4432. О вариационной теореме для конечных упругих деформаций. Рейснер (On a variational theorem for finite elastic deformations. Reissner Eric), J. Math. and Phys., 1953, **32**, № 2—3, 129—135 (англ.)

Пусть x_m, $m = 1, 2, 3$, — координаты точки деформируемой среды в ее недеформированном состоянии, $\mathbf{i}_m$ — орты координатных осей и $\mathbf{r} = \sum x_m \mathbf{i}_m$. Пусть $\mathbf{u} = \sum u_m \mathbf{i}_m$ — вектор смещения. Составляющие конечной деформации определяются формулой $2e_{ij} = \mathbf{g}_i\mathbf{g}_j - \delta_{ij}$, где δ_{ij} — единичный тензор и $\mathbf{g}_i = \sum (\delta_{jm} + \partial u_m / \partial x_j)\,\mathbf{i}_m$.

Пусть $\mathbf{s}_j$ — вектор напряжений на площадку, которая в недеформированном состоянии была нормальна к оси x_j. По Трефтцу составляющие псевдонапряжений s_{jk} определяются формулой $\mathbf{s}_j = \sum s_{jk}\mathbf{g}_k$; они симметричны: $s_{jk} = s_{kj}$, и удовлетворяют уравнениям равновесия: $\sum \partial \mathbf{s}_j / \partial x_k + \mathbf{f} = 0$, где $\mathbf{f}$ — вектор объемных сил. Принимается, что зависимость между напряжениями и деформациями имеет вид $e_{jk} = \partial W / \partial s_{jk}$, где W — данная функция псевдонапряжений.

Пусть p_m — составляющая по оси x_m напряжения, действующего на площадку, до деформации нормальную к некоторому вектору ν. Из условия равновесия элементарного тетраэдра следует формула

$$p_m = \sum\sum \cos(\nu, x_j)\, s_{jk}\left(\delta_{km} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k}\right).$$

Ставится краевая задача: найти поля смещений и напряжений в упругой среде, описываемой приведенными выше соотношениями, если на части S_1 границы этой среды заданы напряжения $p_m = \tilde{p}_m$, а на дополнительной части S_2 границы заданы смещения $u_m = \tilde{u}_m$. Делается дополнительное допущение: $f_m = \partial\Psi / \partial u_m$, где f_m — составляющие объемной силы, а Ψ — данная функция от x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3. Доказывается вариационная теорема, по которой поля смещений и напряжений, решающие поставленную краевую задачу, сообщают стационарное значение интегралу

$$\iiint\left[\sum\sum s_{jk}e_{jk} - W - \Psi\right]dV - \iint_{S_1}\sum \tilde{p}_m u_m\,dS - \iint_{S_2}\sum (u_m - \tilde{u}_m)\,p_m\,dS.$$

В качестве примера рассмотрен изотопный несжимаемый материал, для которого зависимость между главными псевдонапряжениями t_N и главными деформациями e_N ($N = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$) имеет вид

$$s_N = \frac{1}{3}E + \frac{p}{1+2e_N}, \qquad (1)$$

где E — модуль упругости материала, а p имеет характер гидростатического давления и определяется из уравнений (1) и уравнения несжимаемости

$$(1+2e_{\mathrm{I}})(1+2e_{\mathrm{II}})(1+2e_{\mathrm{III}}) = 1.$$

Для такого материала

$$W = -\frac{1}{2}E\sqrt[3]{1 - \frac{3}{E}I_1 + \frac{9}{E^2}I_2 - \frac{27}{E^3}I_3} - \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}E,$$

где I_1, I_2, I_3 — инварианты тензора псевдонапряжений.

Как частный случай своей вариационной теоремы автор получает кирхгофовский принцип ми-

нимума потенциальной энергии для изгиба тонких пластин, из которого в свою очередь вытекают известные уравнения Кармана.

С. Г. Михлин

4433. Ламинарное течение в каналах с проницаемыми стенками. Берман (Laminar flow in channels with porous walls. Berman Abraham S.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, 24, № 9, 1232—1235 (англ.)

Рассматривается двумерное установившееся ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в канале с прямоугольным поперечным сечением. Стенки канала имеют одинаковую проницаемость, не зависящую от положения точки. Начало прямоугольной системы координат берется в центре канала, а ось x направляется параллельно стенкам. Пренебрегая массовыми силами, автор ищет компоненты скорости u, v и давление из уравнения Навье — Стокса при следующих граничных условиях:

$$u(x, \pm 1) = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0} = 0, \quad v(x, 0) = 0,$$
$$v(x, \pm 1) = v_w = \text{const},$$

где $\lambda = y/h$, h — половина расстояния между стенками.

Функция тока ψ представляется в виде

$$\psi = [h\bar{u}(0) - xv_w]\, f(\lambda),$$

где $\bar{u}(O)$ — усредненное значение u в сечении $x = 0$. $f(\lambda)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$R(f'^2 - ff'') + f''' = k,$$

где R — число Рейнольдса, k — произвольная постоянная, определяемая в дальнейшем из граничных условий. $f(\lambda)$ и k разлагаются в ряд по положительным степеням R и даются рекуррентные формулы для коэффициентов разложения. Автор ограничивается первыми двумя приближениями, на основании которых приходит к некоторым заключениям относительно профиля скорости и распределения давления. Дается также сравнение полученных результатов с решением задачи течения Пуазейля. В работе не исследуется сходимость процесса последовательных приближений.

Д. Е. Долидзе

4434. Короткие поверхностные волны, вызванные колеблющимся погруженным телом. Эрселл (Short surface waves due to an oscillating immersed body. Ursell F.), Proc. Roy. Soc., 1953, A220, № 1140, 90—103 (англ.)

Пусть бесконечно длинный цилиндр радиуса a наполовину погружен в жидкость и совершает колебания в направлении y, перпендикулярном поверхности жидкости, с круговой частотой σ. В предыдущей работе автора (Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1949, 2, 218) эта задача была решена для малых значений параметра $N = a\sigma^2/g$. В настоящей работе дан метод решения задачи для больших значений параметра N.

Потенциал скоростей $\varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0,$$

граничным условиям и условию излучения:

$$K\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \qquad \text{при } y = 0,\ |x| > a,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = U_0 \cos\theta \cdot e^{-i\sigma t} \qquad \text{при } r = a,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} - iK\varphi \to 0 \qquad \text{при } r \to \infty,$$

где $K = \sigma^2/g$.

Применяя теорему Грина к функциям $\varphi(x, y)$ и $G(x, y, \xi, \eta)$, где

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2}\ln\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2} -$$
$$- 2\int_0^\infty e^{-k(y+\eta)}\frac{\cos k(x-\xi)}{k-K}\,dk - 2\pi i e^{-K(y+\eta)} \times$$
$$\times \cos K(x-\xi) = \frac{1}{2}\ln\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2} +$$
$$+ G_1(x, y; \xi, \eta),$$

автор получает интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода для функции $\varphi(\theta)$

$$\pi\varphi(\alpha) + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi(\theta) K_1(\theta, \alpha)\,d\theta \equiv$$
$$\equiv \pi\varphi(\alpha) + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \varphi(\theta)\left[\frac{\partial G_2(\theta, \alpha)}{\partial r} + \frac{\partial G_2(-\theta, \alpha)}{\partial r} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial G_3(\theta, \alpha)}{\partial r}\right] d\theta = -\pi a U_0 \cos\alpha +$$
$$+ U_0 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\theta\,[G_2(\theta, \alpha) + G_2(-\theta, \alpha) - G_3(\theta, \alpha)]\,d\theta,$$

которое решается методом итераций. Найдены два приближения для функции $\varphi(\theta)$. Рассчитана также амплитуда волны в бесконечности. Автор полагает, что аналогичный метод решения может быть разработан и применен к волновым функциям в дифракционных задачах акустики и оптики для случая, когда длина волны мала по сравнению с размером препятствия.

П. П. Бирюлин

4435. К теории дифракции электромагнитной волны на горах. Фуруцу (On the theory of diffraction of the electromagnetic wave by mountains. Furutsu Koichi), J. Phys. Soc. Japan, 1953, 8, № 4, 500—524 (англ.)

Развита теория дифракции электромагнитных волн на горах, причем горы рассматриваются как однородные проводящие тела с радиусами кривизны, значительно превышающими длину волны, и с большим комплексным показателем преломления.

Составив интегральное уравнение для электромагнитного поля точечного источника (для «функции Грина») при наличии массивных проводящих тел, автор дает приближенные решения этого уравнения для разных случаев расположения источника и точки наблюдения. Если обе корреспондирующие точки находятся вблизи поверхности горы, причем кривизна поверхности мало меняется вдоль геодезической, соединяющей эти точки, то получается форму-

ла, широко применяемая при расчете распространения радиоволн вокруг Земли. При удалении одной или обеих корреспондирующих точек (источника и точки наблюдения) от поверхности получаются другие выражения, также в ряде случаев хорошо известные.

Дается способ расчета распространения радиоволн при наличии нескольких гор для любых типов «траекторий распространения», состоящих в общем случае из прямолинейных отрезков, соответствующих распространению в свободном пространстве, и криволинейных отрезков, соответствующих диффракционному распространению вокруг препятствий. Приведены также выражения для поля, отраженного от горы.

Автор последовательно применяет матричную запись уравнений Максвелла (с употреблением спиновых матриц Паули), что сокращает выкладки, но зато делает статью совершенно неудобочитаемой. Для пользования статьей (даже ее конечными результатами!) необходим «перевод» ее формул на обычный электродинамический язык, для чего может понадобиться особая работа. *Л. А. Вайнштейн*

4436. Теория передающей линии, состоящей из отдельного провода. Робертс (Theory of the single-wire transmission line. Roberts T. E., Jr), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 1, 57—67 (англ.)

Рассмотрены две задачи на исследование электромагнитного процесса вокруг длинного тонкого прямого провода, обладающего ненулевым так называемым поверхностным импедансом, причем исследованы стационарный синусоидальный электрический ток в проводе и соответствующее электромагнитное поле вокруг провода. В первой задаче рассмотрен провод полубесконечной длины, присоединенный к коаксиальной линии передачи. Во второй задаче рассмотрен провод конечной длины, соединяющий две коаксальные линии передачи и находящийся между двумя бесконечными идеально проводящими параллельными пластинами.

Применяются известные выражения составляющих электромагнитного поля в цилиндрических координатах, содержащие функции Ханкеля 1-го рода $H_0^{(1)}(x)$ и $H_1^{(1)}(x)$. Одна из составляющих поля $H_\varphi(\rho, z)$ удовлетворяет уравнению вида

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho H_\varphi(\rho, z)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}H_\varphi(\rho, z)+\beta^2 H_\varphi(\rho, z)=0,$$

которое является следствием уравнений Максвелла. Задачи с данными граничными условиями и с учетом условия излучения решаются при помощи функций Грина. Выражения функций Грина получаются в виде контурного интеграла в комплексной плоскости (в первой задаче) и в виде бесконечного ряда (во второй задаче), причем эти выражения содержат функции Бесселя и Ханкеля 1-го рода и 1-го порядка. Выражения тока преобразуются посредством деформирования пути интегрирования в комплексной плоскости. В следующей работе автор предполагает сравнить некоторые из полученных здесь результатов с экспериментальными данными. Указано отношение рассмотренных задач к теории волноводов. *Н. А. Бразма*

4437. Применение биполярной системы координат к расчету статических и стационарных полей линии связи. Судаков В. А., Сб. науч. работ по проводной связи АН СССР, 1953, № 2, 31—58

Биполярная система координат применяется к расчету статических электрических и магнитных полей. Сначала излагаются основные свойства этой системы, а потом решаются в плоском случае уравнения Лапласа и Пуассона в этих координатах при различных граничных условиях. Границами областей являются координатные линии биполярной системы. Решения ищутся при помощи физических соображений и большей частью даются в элементарных функциях.

Получены решения для следующих статических полей: 1) электрическое поле двух параллельных круговых цилиндров одинакового радиуса, заряженных разноименно и одноименно; 2) магнитное поле двух параллельных круговых цилиндров, одинаковых или разных радиусов, обтекаемых постоянным током в разных направлениях, причем цилиндры из немагнитного материала или железные; 3) магнитное поле полого кругового цилиндра, причем полость эксцентрична относительно оси цилиндра; 4) магнитное поле неаксиального кабеля с оболочкой переменной толщины. *Э. Я. Риекстыньш*

4438. Гиперболические проблемы газодинамики с числом независимых переменных, большим двух. Зауэр (Hyperbolische Probleme der Gasdynamik mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen. Sauer R.), Z. angew Math. and Mech., 1953, **33**, № 10/11, 331—336 (нем.)

С 1945 г. в теоретической газодинамике рассматривались преимущественно вопросы, в которых число фигурирующих независимых переменных больше двух. В настоящей работе автор дает обзор употребляемых при этом математических методов, ограничиваясь рассмотрением идеальных сред и проблем гиперболического типа. Из линейных методов наиболее подробно разобран метод фундаментального решения. Автор останавливается также кратко на методе однородного решения, который применим, если потенциал скоростей является однородной функцией независимых переменных x, y, z, и на операционном методе. Касаясь нелинейных методов, автор в основном ограничивается указаниями, в каких исследованиях рассматривались соответствующие вопросы.

Библиография 12 названий. *Д. П. Костомаров*

4439 Д. Исследование устойчивости неустановившегося движения некоторых регулируемых систем. Бедельбаев А. К. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ленингр. политехн. ин-т, Л., 1954

4440 Д. О колебаниях не вполне упругой нити (троса) переменной длины с грузом на конце. Шевело В. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1953

4441 Д. Обратные задачи, связанные с неустановившимся движением контура в жидкости. Лебедев Л. Л. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанский ун-т, Казань, 1953

4442 Д. Напряженное состояние в цилиндрической оболочке, ослабленной круговым отверстием. Василенко Н. Г. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ленингр. политехн. ин-т, Л., 1953

См. также: 4381, 4408, 4443 Д, 4444, 4466, 4480, 4556, 4563

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4443 Д. Краевые задачи для систем линейных интегро-дифференциальных уравнений в некоторых функциональных пространствах. Александрийский **Б. И.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанский ун-т, Казань, 1954

См. также: 4419 К, 4434, 4435, 4584

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4444. Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях и приложение их к вариационным задачам. Никольский (Differenciálható sokaságokon értelmezett többváltozós függvények bizonyos osztályainak sajátságai és alkalmazásuk variációs feladatokra. Nyikoljszkij Sz. M.), Magyar tudomán. akad. mat. és fiz. osztályának közleményei, 1953, **3**, № 2, 243—252 (венг.)

Пусть r — натуральное число, G — область в R^n, границей которой является r раз непрерывно дифференцируемое многообразие S $n-1$ измерений (все непоясненные в настоящем реферате термины см. в РЖМат, 1953, 148, 149). Пусть на S заданы функции f_λ ($\lambda = 0, 1, \ldots, r-1$). Функция $F(x_1, \ldots, x_n)$, определенная на G, называется допустимой, если она и ее частные производные до порядка r включительно интегрируемы с квадратом на G и

$$\left.\frac{\partial^\lambda F}{\partial N^\lambda}\right|_S = f_\lambda \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, r-1)$$

$\left(\frac{\partial}{\partial N}\right.$ означает дифференцирование по нормали $\left. N \text{ к } S\right)$.

Известно (Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, ЛГУ, 1950), что если существует хоть одна допустимая функция F, то существует и допустимая функция $u(x_1, \ldots, x_n)$, для которой интеграл

$$D_r[F] = \int_G \ldots \int \sum_{\Sigma\alpha_i = r} \frac{r!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \times \left(\frac{\partial^r F}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)^2 dx_1 \ldots dx_n$$

достигает минимума на классе всех допустимых функций. Эта функция u удовлетворяет в G полигармоническому уравнению $\Delta^r u = 0$. Возникает вопрос о нахождении структурных свойств функций f_λ, необходимых и достаточных для существования допустимой F. Обозначим через σ кусок многообразия S, координаты точек которого явно выражаются как функции некоторых $n-1$ координат; пусть G_σ означает проекцию σ на линейное подпространство соответствующих $n-1$ переменных.

Тогда для существования хотя бы одной допустимой функции: 1) необходимо, чтобы на любом σ функции f_λ принадлежали классу $H_2^{\left(r-\lambda-\frac{1}{2}\right)}(G_\sigma, M)$, 2) достаточно, чтобы нашлось $\varepsilon > 0$ такое, что на любом σ функции f_λ принадлежат классу $H_2^{\left(r+\varepsilon-\lambda-\frac{1}{2}\right)}(G_\sigma, M)$.

В случае $r = 1$ получаем условия существования допустимой функции в вариационной задаче, соответствующей задаче Дирихле. Доказательства основаны на теоремах автора о функциях многих переменных на дифференцируемых многообразиях. *С. М. Лозинский*

Примечание редакции. В рассматриваемом в реферате случае, когда число измерений границы области отличается от n на нечетное число, необходимое условие 1) можно получить при $r = 1$ из теоремы В. И. Кондрашова (см. стр. 94 цитированной книги С. Л. Соболева) и при $r > 1$ путем соответствующего развития этой теоремы и теоремы вложения С. Л. Соболева.

4445. Об одном частном классе задач вариационного исчисления. Баяда (Su una classe particolare di problemi di calcolo delle variazioni. Baiada Emilio), Ann. Scuola norm. sup. Pisa, 1952, **6**, № 3—4, 173—186 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Рассматривается вопрос о существовании абсолютного минимума интеграла

$$I_C = \int_a^b f(x, y, y')\, dx.$$

Основным затруднением является некомпактность класса функций, допускающих явное задание. Ввиду этого вместе с I_C рассматривается его параметрическое представление

$$J_C = \int_C F(x, y, x', y')\, dt$$

на всех кривых класса K, который: 1) состоит из непрерывных спрямляемых кривых, содержащихся в ограниченной замкнутой части R плоскости xy; 2) содержит какие-либо кривые, допускающие явное задание; 3) вместе с каждой допускающей явное задание кривой содержит все кривые, получающиеся из нее перестановкой конечного или счетного множества ее участков, переносимых параллельно оси x или оси y; 4) компактен.

Если J_C полунепрерывен снизу, а функция F неотрицательна и не зависит от x и y, то из существования минимизирующей J_C последовательности кривых, сходящихся к явно заданной кривой и имеющих ограниченные в совокупности длины, можно заключить, что абсолютный минимум J_C в классе K заведомо достигается на специального вида заданной явно кривой, которая состоит всего из трех монотонных участков поочередного возрастания и убывания. Если функция f интегрируема на этой кривой, то на ней же достигается минимум I_C.

С. И. Залгаллер

См. также: 4419 К, 4432

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

4446. О функциональном уравнении дистрибутивности. Хоссу (On the functional equation of distributivity. Hosszú Miklós), Acta math. Acad. sci. hung., 1953, **4**, № 1—2, 159—167 (англ.; резюме русск.)

Изучаются решения функционального уравнения дистрибутивности

$$F[G(x, y), z] = G[F(x, z), F(y, z)]$$

при надлежащих условиях, налагаемых на искомые функции F и G. Доказывается теорема:

Любые строго монотонные и дважды дифференцируемые функции $F(x, y)$, $G(x, y)$, удовлетворяющие функциональному уравнению

$$F[G(x, y), z] = G[F(x, y), F(y, z)],$$

можно записать в форме

$$F(x, y) = f^{-1}[f(x)\, g(y) + h(y)]$$
$$G(x, y) = f^{-1}[f(y) + \varphi[f(x) - f(y)],$$

где $f(t)$, $g(t) \neq 0$ и $h(t)$ — произвольные строго монотонные и дважды дифференцируемые функции.

Причем 1) если $g(t) \equiv 1$, то $\varphi(t)$ — произвольная строго монотонная и дважды дифференцируемая функция;

2) если $g(t) = -1$, то $\varphi(-t) = -\varphi(t)$;

3) если $|g(t)| \not\equiv 1$; $\varphi(t) = \lambda t$ [$\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$].

Рассмотренное функциональное уравнение является обобщением уравнения автодистрибутивности

$$F[F(x, y), z] = F[F(x, z), F(y, z)],$$

которое изучали Ацел (Aczel J., Bull. Amer. Math. Soc., 1948, **54**, 392—400), Рылл-Нардзевский (C. Ryll-Nardzewski, Studia math., 1949, **11**, 31—37), Кнастер (Knaster B., Colloquium math., 1949, **2**, 1—4). *П. И. Романовский*

4447. Производные бесконечного порядка. Лорх (Derivatives of infinite order. Lorch Lee), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 4, 773—788 (англ.)

В 1900 г. Витали отметил то обстоятельство (Vitali G., Rend. circ. mat. Palermo, 1900, **14**, 209—216), что из существования в плоскости z предела

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(z) = g(z) \qquad (1)$$

следует, что функция $g(z)$ целая и имеет вид $g(z) = k \exp z$. В одной из позднейших работ Боас и Чандрасекхаран (Boas R. P., Chandrasekharan K., Bull. Amer. Math. Soc., 1948, **54**, 523—526, 1191), изучая вопрос о пределе (1) в действительной области, указали на желательность допущения, взамен обыкновенной сходимости, различных обобщенных процессов суммирования. В этом направлении автор устанавливает следующие положения:

1. Если функция $f(x)$ аналитическая в некотором промежутке и предел

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x), \qquad (2)$$

понимаемый в смысле экспоненциальной суммируемости Бореля, существует в некоторой точке x_0 этого промежутка, то он существует и во всех его точках, причем сходимость равномерная, если промежуток конечный; далее следует и заключение Витали:

$$g(x) = k \exp x.$$

2. Эта теорема распространяется и на тот случай, когда в рассматриваемом промежутке функция $f(x)$ предполагается квазианалитической в смысле Данжуа—Карлемана.

3. Для того, чтобы в промежутке (a, b) существовал конечный предел (2) в смысле Бореля, необходимо и достаточно, чтобы предел $g(x)$ определялся формулой (3), а функция $f(x)$ была целой, вида

$$f(z) = k \exp z + o(\exp z).$$

4. Вместо соотношения (2) рассматривается более общее:

$$\lim_{n\to\infty} (f^{(\alpha n)}(x) / \lambda_n) = g(x),$$

где α—целое положительное число, $\{\lambda_n\}$ — данная последовательность. В частности, при $\lambda_n = 1$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) функция $g(x)$ удовлетворяет уравнению $g^{(\alpha)}(x) = g(x)$.

5. Предшествующий результат обобщается на более общие методы суммирования, обладающие свойством: если существует предел $\lim s_n = s$, то существует и равен ему также предел $\lim s_{n-1}$ (метод Бореля этим свойством не обладает).

Настоящая заметка отчасти соприкасается с одной из ранних работ С. Н. Бернштейна (Собрание сочинений, том I, Изд-во АН СССР, 1952, 107—111). *В. Л. Гончаров*

4448. Условия интегрируемости дифференциального бинома через эллиптическую трансцендентность. Маззарелла Фраго (Condizioni di integrabilità di un differenziale binomio mediante le trascendenti ellittiche. Mazzarella Frago), Giorn. mat. Battaglini, 1953, **81**, № 2, 199—201 (итал.)

Не интегрируемый элементарно дифференциальный бином $x^m(ax^n+b)^p dx$ интегрируется через эллиптическую функцию, когда один из знаменателей чисел p и $(m+1-n)/n$, записанных в виде несократимых дробей, равен 2, а другой 3, 4 или 6. *Э. Апарисио*

4449. О сдвиге нулей функций, возникающем при интегрировании дробного порядка. Ватанабе (Ueber die Verschiebung der Nullstellen einiger Funktionen, welche aus Integration gebrochener Ordnung hervorgeht. Watanabe Yoshikatsu), J. Gakugei Tokushima Univ., 1953, **3**, 16—20 (нем.)

Автор дает элементарное доказательство того факта (Pólya, Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Springer, Berlin, 1925, **2**, 260, задача 179), что функция $H(z)=1+\sum_{n=0}^{\infty} z^n/(\alpha+1)\dots(\alpha+n)$ имеет нули с $\mathrm{Re}(z)>\alpha-1$ или $<\alpha-1$ соответственно для $\alpha>1$ или $0<\alpha<1$. Он указывает, что функции

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{\Gamma(2n+\alpha+1)},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{\Gamma(2n+\alpha)},$$

относящиеся к $\cos z$, $\sin z$, как $H(z)$ относится к $\exp z$, имеют только действительные нули для $0\leqslant\alpha<2$, $0\leqslant\alpha<1$ соответственно. *R. P. Boas, Jr.*

Перевод из Math. Rev., 1954, **15**, № 1, 21.

4450. Применение преобразования в степенные ряды к линейным разностным уравнениям в технике. Мак-Фадден (The application of the power series transform to linear difference equations in engineering. McFadden Leonard), Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1953, **79**, № 225, 1—14 (англ.)

Преобразование последовательности $\{f_k\}$, $k=0,1,2,\dots$, в степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} f_k s^k$ применяется для решения линейных разностных уравнений второго порядка $f_{k+2}+2bf_{k+1}+cf_k=F(k)$. Рассмотрен ряд примеров из техники. *А. А. Конюшков*

4451. О некоторых трансцендентных уравнениях. II. Воделанн (On some transcendental equations. II. Waadeland Haakon), Norske Vid. Selsk. Forh., Trondheim, 1952, **25**, 42—45 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Первую часть см. в Norske Vid. Selsk. Forh., Trondheim, 1952, **24**, 16—19). Для уравнений $\mathrm{ch}\,z\cdot\cos z=\pm 1$ все положительные корни могут быть найдены из степенных рядов, полученных Релеем (Rayleigh, The theory of sound, v. 1, 2-nd ed., Macmillan, 1929 (есть русский перевод.— *Прим. ред.*). Здесь рассматривается сходимость этих рядов. *E. Frank*

Перевод из Math. Rev., 1954, **15**, № 1, 65.

4452. О некоторых трансцендентных уравнениях. III. Воделанн (On some transcendental equations. III. Waadeland Haakon), Norske Vid. Selsk. Forh., Trondheim, 1952, **25**, 46—49 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Рассматривается сходимость степенных рядов, дающих положительные корни уравнений $\mathrm{tg}\,x=x$ и $\mathrm{tg}\,x=2x$. *E. Frank*

Перевод из Math. Rev., 1954, **15**, № 1, 65.

4453. Оригинал функции $p^{-\lambda}{}_{q+1}F_q(-p^{-\alpha})$ и его интегральное представление. Гупта (Original of $p^{-\lambda}{}_{q+1}F_q(-p^{-\alpha})$ and its integral representation. Gupta H. C.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1953, **19**, № 5, 691—695 (англ.)

На основе интегрального представления гипергеометрической функции ${}_{q+1}f_q$ (интеграл Барнса) доказывается формула

$$p^{-\lambda}{}_{q+1}f_q\left(\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_q,\ c;\\ b_1,b_2,\dots,b_q;\end{matrix}\ -p^{-\alpha}\right)=$$
$$=\sum_{j=1}^{q}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\left\{\prod_{n=1}^{q}{}^{*}\frac{\Gamma(a_n-a_j-r)}{\Gamma(b_n-a_j-r)}\right\}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(a_j+r)\,x^{\lambda+\alpha(a_j+r)}}{\Gamma(1+\lambda+\alpha a_j+\alpha r)},\qquad(1)$$

где $0<\alpha<2$, $\mathrm{Re}(\lambda+\alpha c)>-1$, $\mathrm{Re}(\lambda+\alpha a_n)>-1$, $a_0=c$, а ${}_{q+1}f_q$ отличается от ${}_{q+1}F_q$ (в заглавии) постоянным множителем. (*) означает, что при $n=j$, $a_n^*=c$. Допускается, что ни один из параметров $c, a_1,\dots,a_q$ не является целым отрицательным, а разность любых двух из них — целым числом.

Дается также интегральное представление оригинала. Формула (1) обобщает известные формулы. В частных случаях (например, $\alpha=1$), как это показано дальше, правая часть (1) выражается через гипергеометрические функции. Без особого оправдания формула (1) применяется также при $\alpha=2$. *Э. Я. Риекстыньш*

4454. Некоторые преобразования вполне уравновешенных гипергеометрических рядов (с основанием) типа ${}_8\Phi_7$. Агарвал (Some transformations of well-poised basic hypergeometric series of the type ${}_8\Phi_7$. Agarwal R. P.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 5, 678—685 (англ.)

Обобщенным гипергеометрическим рядом Гейне с основанием называется ряд

$${}_r\Phi_s\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\dots,a_r;\\ b_1,b_2,\dots,b_s\end{matrix}\ z\right]=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{q,n}(a_2)_{q,n}\dots(a_r)_{q,n}}{(q)_{q,n}(b_1)_{q,n}\dots(b_s)_{q,n}}\,z^n,$$

где q — основание ряда, $(a)_{q,0}=1$,

$$(a)_{q,n}=(1-a)(1-aq)(1-aq^2)\dots(1-aq^{n-1}).$$

Ряд

$$ {}_{s+1}\Phi_s\left[\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_{s+1}; \\ b_1, b_2, \ldots, b_s \end{matrix} z\right] $$

называется вполне уравновешенным, если $a_1 q = a_2 b_1 = a_3 b_2 = \ldots = a_{s+1} b_s$.

Автор классифицирует вполне уравновешенные ${}_s\Phi_7$ в зависимости от значений параметров a_i и из трех формул Бейли (Bailey W. N., Quart. J. Math. Oxford. ser., 1936, **7**, 105—115) выводит ряд соотношений между рядами

$$ {}_8\Phi_7\left[\begin{matrix} a, & qa^{1/2}, & -qa^{1/2}, & b, & c, & d, & e, & f; \\ a^{1/2}, & -a^{1/2}, & aq/b, & aq/c, & aq/d, & aq/e, & aq/f & \end{matrix} a^2q^2/bcdef\right]. $$

Указанные выше формулы Бейли автор выводит затем, пользуясь контурными интегралами типа Барнса (Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, часть 2, Гостехиздат, Л.—М., 1934, 71). *Л. М. Глускин*

4455. Заметка об основании натуральных логарифмов. Лич (A note on the base of natural logarithms. Leach Ernest), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 9, 622—623 (англ.)

4456. О разложении числа на попарно неравные значения полинома. Крубек (Über Zerfällungen in paarweis ungleiche Polynomwerte. Krubeck Eleonore), Math. Z., 1953, **59**, № 3, 255—257 (нем.)

Используя метод Шпраге (Sprague R., Math. Z., 1948, **51**, 466—468), автор доказывает теорему:

Для всякого полинома $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ с вещественными коэффициентами и $a_n > 0$ существует некоторое положительное число s_0 такое, что любое число $z \geqslant 0$ представимо в форме $z = r + f(x_1) + f(x_2) + \ldots$ для $0 < f(x_1) < f(x_2) < \ldots$, $0 < x_1 < x_2 < \ldots$ при целых положительных x_i и $0 \leqslant r < s_0$. *Б. А. Рымаренко*

4457. Две рекуррентные формулы для сумм s_{2k}. Янкович (Two recurrence formulae for the sums s_{2k}. Janković Zlatko), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1953, **8**, сер. 2, № 1, 27—29 (англ.; резюме хорв.)

Приводятся две рекуррентные формулы для сумм

$$ s_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}. $$

Т. И. Красношекова

4458. Две формулы суммирования сумм произведений биномиальных коэффициентов. Андерсен (Two summation formulae for product sums of binomial coefficients. Andersen Erik Sparre), Math. scand., 1953, **1**, № 2, 261—262 (англ.)

Доказываются по индукции две формулы:

$$ \sum_{i=0}^{k} \binom{a}{i}\binom{-a}{n-i} = \frac{n-k}{n}\binom{a-1}{k}\binom{-a}{n-k} $$

$$ (n = 1, 2, \ldots;\ k = 0, 1, \ldots, n), $$

$$ \sum_{i=0}^{k} \binom{a}{i}\binom{1-a}{n-1} = \frac{(n-1)(1-a)-k}{n(n-1)} \times \binom{a-1}{k}\binom{-a}{n-k-1} $$

$$ (n = 2, 3, \ldots;\ k = 0, 1, \ldots, n-1). $$

А. А. Конюшков

4459. Замечания об однородных функциях. Бертолини (Osservazioni sulle funzioni omogenee. Bertolini Fernando), Boll. Unione mat. ital., 1953, сер. 3, **8**, № 1, 65—71 (итал.)

Рассматриваются однородные функции n переменных, т. е. функции $f(Q)$ точки Q n-мерного координатного пространства, для которых существует точка P_0 и число α такие, что для каждых двух точек Q_1, Q_2, лежащих на одной прямой с P_0 $f(Q_2) = (P_0Q_2/P_0Q_1)^{\alpha} f(Q_1)$; точка P_0 — полюс, а число α — степень однородной функции. Показывается, что однородные функции с несколькими полюсами имеют одну и ту же степень по отношению к каждому полюсу; множество полюсов такой функции является линейным подпространством, а значения функции постоянны в подпространствах, параллельных подпространствам полюсов. Вследствие этого задание такой функции с p-мерным подпространством полюсов сводится к заданию однородной функции $n - p$ переменных с одним полюсом. *Б. А. Розенфельд*

4460 К. Руководство для практических занятий по высшей математике. Ч. II. Хахубия

(უმაღლესი მათემატიკის პრაქტიკული მეცადინეობის სახელმძღვანელო. ხახუბია გ., ч. II, 290 стр., «Техника да Шрома», Тбилиси, 1953)

Книга представляет собой рабочее пособие для практических занятий по математике для студентов технических вузов.

Глава I. Неопределенный интеграл. Простейшие и специальные методы интегрирования некоторых классов элементарных функций. Глава II. Определенный интеграл; его вычисление. Геометрические и механические применения. Интегрирование и дифференцирование интегралов, зависящих от параметра. Несобственные интегралы. Глава III. Кратные интегралы; их вычисление. Преобразование переменных. Геометрические и механические приложения. Глава IV. Дифференциальные уравнения. Интегрирование простейших обыкновенных дифференциальных уравнений. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Глава V. Ряды. Разные признаки сходимости. Равномерная сходимость. Степенные ряды и разложения в ряд.

В каждой главе книги основному материалу по упражнениям предпосылается теоретический материал, разъясняющий смысл основных понятий, применяемых в тексте, а также основных операций анализа. Дается решение типичных задач.

И. Н. Карцивадзе

4461 К. Краткий курс математического анализа. Хинчин А. Я., 624 стр., Гостехиздат, М., 1953, 13 р. 10 к.

Книга предназначена для студентов механико-математических и физико-математических факультетов университетов (и педагогических институтов). Содержание ее видно из оглавления:

Раздел первый. Введение в анализ. Глава 1. Функции; Глава 2. Элементарная теория пределов; Глава 3. Уточнение и расширение идеи предельного перехода; Глава 4. Вещественные числа; Глава 5. Непрерывность функций.

Раздел второй. Элементы дифференциального исчисления. Глава 6. Производная; Глава 7. Дифференциал; Глава 8. Производные и дифференциалы высших порядков; Глава 9. Теоремы о средних значениях; Глава 10. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций.

Раздел третий. Элементы интегрального исчисления. Глава 11. Обращение операции дифференцирования; Глава 12. Интеграл; Глава 13. Связь интеграла с примитивной функцией; Глава 14. Геометрические и механические приложения интеграла; Глава 15. Приближенное вычисление интегралов; Глава 16. Интегрирование рациональных функций; Глава 17. Интегрирование простейших иррациональных и трансцендентных функций.

Раздел четвертый. Бесконечные ряды. Глава 18. Бесконечные ряды чисел; Глава 19. Бесконечные ряды функций; Глава 20. Степенные ряды и ряды многочленов; Глава 21. Тригонометрические ряды.

Раздел пятый. Дальнейшее развитие дифференциального исчисления. Глава 22. Дифференцирование функций нескольких переменных; Глава 23. Простейшие геометрические приложения дифференциального исчисления; Глава 24. Неявные функции.

Раздел шестой. Дальнейшее развитие интегрального исчисления. Глава 25. Обобщенные интегралы; Глава 26. Интегралы как функции параметров; Глава 27. Двойные и тройные интегралы; Глава 28. Криволинейные интегралы; Глава 29. Поверхностные интегралы.

Заключение. Краткий исторический очерк.

Таким образом, меньше чем на 40 листах автор изложил материал двухлетнего курса математического анализа. В этой связи приведем выдержку из предисловия автора, характеризующую книгу: «Стремясь сделать предлагаемое руководство возможно более кратким, я шел к этой цели исключительно путем отбора минимального материала, но нигде не стремился к лаконизму изложения. Связи между различными понятиями, теоремами, задачами и целыми теориями, их роль и методы их применения в прикладных науках и технике, а также многие другие идейно принципиальные моменты математического анализа во многих случаях освещены в курсе полнее и последовательнее, чем это обычно делается. . .».

Существенной особенностью книги является подход к понятию предела. Сначала, в главе 2, теория пределов развивается, исходя из интуитивного представления о «процессе» и отдельных его «моментах». В следующей главе производится уточнение понятия предела для простейших случаев, а затем это понятие расширяется настолько, чтобы охватить все потребности курса анализа.

В изложении имеется ряд других мест, заслуживающих быть отмеченными. Для примера упомянем непосредственное доказательство непрерывности степенной функции (стр. 100); раннее введение и использование «интеграла функции, взятого вдоль кривой» (стр. 232); рассмотрение функционального определителя как локального коэффициента растяжения площади — до двойного интеграла (стр. 448).

Г. М. Фихтенгольц

4462 К. Принципы математического анализа. Рудин (Principles of mathematical analysis. Rudin Walter, IX + 227 pp., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York—Toronto—London, 1953, 5.00 doll.)

Автор рассматривает классические элементы теории функций действительного переменного: действительные числа по Дедекинду, элементарную теорию множеств, сходимость, непрерывность, дифференцирование, интеграл Римана — Стилтьеса, равномерную сходимость, функции нескольких переменных, меру и интеграл Лебега. Ясное и краткое изложение предназначено для студентов.

Необходимость ограничительных предположений в теоремах подчеркивается иллюстративными контрпримерами. В общем рассматриваемые пространства евклидовы, но читатель знакомится и с более абстрактными идеями: например, общими метрическими пространствами и пространствами с мерой. [Референт заметил только одну ошибку; она встречается в главе об интеграле Римана — Стилтьеса. Даны два определения (6.2) и (6.26) интеграла и утверждается, что они эквивалентны, если интегратор монотонен. Это неверно, если интегратор не предположить также непрерывным. Та же ошибка в теореме 6.11, где должно быть сделано то же дополнительное предположение.] *U. S. Haslam-Jones*

Перевод из Math, Rev., 1953, **14**, № 11, 1070.

4463 К. Руководство по задачам из курса общей математики. Булиган, Риво (L'enseignement des mathématiques générales par les problèmes. Bouligand, Rivaud, VIII + + 852 p., Librairie Vuibert, Paris, 1953, 5300 fr.) (франц.)

Руководство предназначено для практических занятий и тренировочных упражнений учащихся специальных математических классов французских лицеев по начальному (общему) курсу высшей математики. Программа этого курса включает следующие разделы: аналитическую геометрию, дифференциальное и интегральное исчисления, сведения по дифференциальной геометрии, элементы теории дифференциальных уравнений, приложения математики к механике (главным образом, к статике и кинематике). Основная цель специальных математических классов — подготовка к весьма строгим конкурсным экзаменам в специальные высшие учебные заведения, в первую очередь — в Политехническую школу. Этими обстоятельствами полностью определяется содержание руководства Булигана и Риво. Здесь по методически продуманной системе приводятся многочисленные детально разобранные типовые задачи на все разделы курса, сопровождающиеся в отдельных местах краткими теоретическими поясне-

ниями. В конце каждой главы помещен большой набор упражнений и задач для самостоятельного решения (частично, без ответов), содержащий, наряду с обычными стандартными примерами, трудные задачи, требующие для своего решения, кроме хорошего знания теории, математической сообразительности и большой математической техники.

Руководство состоит из четырех частей (книг). Первая часть носит вводный характер и является пропедевтической для дальнейших упражнений. Вторая часть (основная) составлена применительно к теоретическим курсам одного из авторов (Bouligand G., Initiation à l'analyse mathématique, 4 éd.; Bouligand G., Rabaté G., Initiation aux méthodes vectorieles et aux applications géométriques et dynamiques de l'analyse, 5 éd.) и включает упражнения по всем разделам общего курса математики. Третья часть содержит большой выбор комбинированных задач с образцами решений их, предлагавшихся на различных экзаменах. Кстати сказать, эти полезные задачи слабо представлены в нашей учебной литературе. Четвертая часть посвящена некоторым дополнительным вопросам общего курса (теории вероятностей, математической физике и др.).

В общем руководство Булигина и Риво представляет собой солидный практикум по математическому анализу и может быть с успехом использовано при преподавании высшей математики на младших курсах высших учебных заведений. *Б. П. Демидович*

4464 К. Учебник по математике Лефакса (Lefax manual of mathematics, 334 p., Lefax Publishers, Philadelphia 7, Pa, 1953, 2.25 doll.), Chem. and Engng News, 1953, **43**, 4469 (библ.)

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

4465. Заметка о γ-матрицах, эффективных в изолированной точке. Вермс (Note on γ-matrices efficient at an isolated point. Vermes P.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1953, сер. 2, **10**, 11—12 (англ.)

Известно, что биномиальный ряд

$$A(z,\ p) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p+k-1}{k} z^k \quad (p = 1,\ 2,\ \ldots),$$

соответствующий функции $f(z) = (1-z)^{-p}$, сходится, если $|z| < 1$, и расходится, если $|z| \geqslant 1$. Частные суммы этого ряда при $|z| > 1$ неограничены. Приводится γ-матрица (g_{nk}) (т. е. матрица, определяющая регулярный метод суммирования при помощи множителей сходимости $g_n(k) = g_{nk}$; $n,\ k = 1,\ 2,\ \ldots$), суммирующая ряд $A(z,\ p)$ вне его области сходимости только в одной точке $z = z_0$ ($|z_0| > 1$), причем к любому наперед заданному комплексному числу a. Элементы матрицы (g_{nk}) определяются следующим образом:

$$g_{nk} = (1-z_0)^{-p} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{p}{j} (-z_0)^j \text{ при } k \leqslant n,$$

$$g_{nk} = b/2^{k-n} c_k z_0^k \text{ при } k > n,$$

где $b = a - (1-z_0)^{-p}$, $c_k = \binom{p+k-1}{k}$.

Возможность построения различных T-матриц и эквивалентных им γ-матриц, суммирующих ряд $A(z,\ p)$ вне его круга сходимости только в одной точке и к любой величине, следует из результатов референта (Изв. АН СССР, сер. матем., 1946, **10**, 97—104; теорема 2) и Целлера (Zeller K., Arch. Math., 1953, **4**, 1—5; Satz 1). *В. М. Даревский*

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

4466. Интегральные соотношения между функциями Эрмита и Лагерра первого и второго рода и многочлены, с ними связанные. Палама (Relazioni integrali tra le funzioni d'Hermite e di Laguerre di prima e seconda specie, e su dei polinomi ad esse associati. Palamà Giuseppe), Riv. math. Univ. Parma, 1953, **4**, № 1—2, 105—122 (итал.)

Устанавливаются многочисленные и разнообразные формулы, содержащие многочлены Эрмита $H_n(x)$ и Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$ (весом ортогонализации для многочленов $H_n(x)$ служит $\exp(-x^2/2)$; нормировка $H_n(x)$ и $L_n^{(\alpha)}(x)$ также несколько своеобразна). Чтобы дать представление о характере упомянутых формул, приведем некоторые из них:

$$2n\sqrt{2n}\, H_{2n+1}(x\sqrt{2}) = \frac{(-1)^n (2n+1)!\sqrt{x}}{n!} \int_0^x \frac{L_n(xu)}{\sqrt{x-u}}\, du,$$

$$4x^2 \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \cos^2\varphi L_{n-1}^{(1)}(x^2 \sin^2 2\varphi)\, d\varphi = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!!} H_{2n}(x\sqrt{2}),$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\nu x} x^{\alpha} L_{n_1}^{(\alpha_1)}(\nu_1 x^{m_1}) \ldots L_{n_r}^{(\alpha_r)}(\nu_r x^{m_r}) L_p^{(\alpha)}(x)\, dx = (-1)^{p-s} \frac{\nu_1^{n_1} \ldots \nu_r^{n_r}}{\nu^{p+\alpha+1} n_1! \ldots n_r!} \Gamma(\alpha + p + 1),$$

где $p = \sum n_i m_i$, $s = \sum n_i$; $\alpha > -1$, $\nu > 0$.

Изучаются некоторые многочлены, связанные с функциями Лагерра. Функцией Лагерра 2-го рода называется интеграл

$$l_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha+n+1)}{\sqrt{2\pi} \cdot n!} \int_0^x \frac{(x-t)^n e^t}{t^{\alpha+n+1}}\, dt.$$

Между $l_n^{(\alpha)}(x)$ и многочленом Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$ существует соотношение

$$l_n^{(\alpha)}(x) = (\Gamma(\alpha+1)/\sqrt{2\pi})\, [L_n^{(\alpha)}(x) I_{\alpha}(x) + e^x x^{-\alpha} P_n^{(\alpha)}(x)],$$

где

$$I_{\alpha}(x) = \int_0^x e^t t^{-\alpha-1}\, dt,$$

а $P_n^{(\alpha)}(x)$ и есть тот многочлен, о котором идет речь (его степень равна $n-1$). В работе даны явные выражения для многочленов $P_n^{(\alpha)}(x)$, находится дифференциальное уравнение, которому они удовлетворяют, и устанавливаются различные соотношения между многочленами этого вида. *И. П. Натансон*

4467. Обобщение основных формул Якоби. Р а ш ф о р т (A generalisation of Jacobi's fundamental formulae. R u s h f o r t h J. M.), Proc. Edinburg Math. Soc., 1953, сер. 2, 9, 17—19 (англ.)

Непосредственно используя определение тэта-функции

$$\vartheta_3(x, q) = \vartheta_3(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2nix}$$

$$(q = e^{\pi i\tau}, \quad |q| < 1),$$

автор доказывает формулу

$$N \prod_{j=1}^{2N} \vartheta_3(X_j) = \sum_{r,s=0}^{N-1} e^{-2\pi i r s/N} \prod_{j=1}^{2N} q^{-r^2/N^2} \vartheta_3(x_j + \pi(s + r\tau)/N) \exp(2ir/N)[x_j + \pi(s + r\tau)/N] \quad (1)$$

$\left(X_j$ определяются из уравнений $N(X_j + x_j) = \sum_{i=1}^{2N} x_i\right)$.

Прибавляя к аргументам $\pi/2$, $\pi\tau/2$ или же $\pi(1+\tau)/2$, автор получает также подобные формулы для $\vartheta_1(x)$, $\vartheta_2(x)$ и $\vartheta_4(x)$. Формула (1) при $N=2$ дает известную формулу Якоби (Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, ч. 2, Гостехиздат, М. — Л., 1934, 305). *Э. Я. Риекстыньш*

4468. Теорема сложения для функций Матье. Ш е ф к е (Das Additionstheorem der Mathieuschen Funktionen. S c h ä f k e F r i e d r i c h W i l h e l m), Math. Z., 1953, 58, № 4, 436—447 (нем.)

Если $u(z, t)$ есть регулярное аналитическое решение уравнения

$$\triangle u + 2h^2(\operatorname{ch} 2z - \cos 2t)\, u = 0 \quad (1)$$

и $y(t)$ — решение уравнения Матье

$$y''(t) + (\lambda - 2h^2 \cos 2t)\, y(t) = 0, \quad (2)$$

то

$$Y(z) = \int u(z, t)\, y(t)\, dt \quad (3)$$

будет решением сопряженного с (2) уравнения Матье (получающегося из (2) заменой $t = \pm iz$), если только $u(z, t)\, y'(t) - y(t)\, u_t'(z, t)$ принимает равные значения на концах интервала интегрирования и интеграл сходится равномерно.

Если $y_1(t)$ есть решение (2) с начальными условиями $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, то по теореме Флоке необходимым и достаточным условием существования решения $y(t) = me_\nu(t)$, обладающего свойством $me_\nu(t + \pi) = e^{\pi i\nu} me_\nu(t) \not\equiv 0$, служит равенство

$$y_1(\pi;\ \lambda,\ h^2) = \cos \nu\pi. \quad (4)$$

Вводятся термины: ν — характеристический показатель уравнения (2), h^2 — нормальное значение характеристического показателя, если уравнение (4) допускает для нецелых ν лишь простые корни относительно λ; в противном случае h^2 есть исключительное значение характеристического показателя.

Пусть $x_1 \pm ix_2 = Re^{\pm i\varphi} = c \cos h(z \pm it)$; пусть в (3) $y(t) = me_\nu(t;\ h^2)$ и $u(z,t) = Z^j_{\nu+2s}(kR)^{-i(\nu+2s)\varphi}$, где $Z^j_{\nu+2s}$ — одна из цилиндрических функций (Бесселя, Неймана или Ганкеля), s — целое; тогда для $\operatorname{Re} z > 0$ будем иметь

$$(-1)^s c^\nu_{2s}(h^2) M^j_\nu(z;\ h) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Z^j_{\nu+2s}(kR)\, e^{-i(\nu+2s)\varphi} \cdot me_\nu(t;\ h^2)\, dt,$$

откуда получаются асимптотические представления для решений сопряженного уравнения Матье

$$M_\nu(z;\ h) \sim Z^j_\nu(2h \cos hz), \quad (\operatorname{Re} z \to +\infty).$$

Наконец, выводится основная теорема — теорема сложения — для решения уравнения эллиптического цилиндра:

Если h^2 есть нормальное значение для ν и $\nu + 1$, то

$$M^j_\nu(z_0;\ h_0)\, me_\nu(t_0;\ h_0^2) =$$

$$= \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s M^j_{\nu+s}(z;\ h)\, me_{\nu+s}(t;\ h^2). \quad (5)$$

Формула (5), выражаясь физически, представляет цилиндрические волны с заданной осью в виде суперпозиции цилиндрических волн с другой осью, параллельной первой. В этом и состоит теорема сложения. Математически этому соответствует следующее:

Всякое решение плоского уравнения колебаний, которое допускает разделение переменных в заданной полярной системе координат, может быть разложено в ряд по решениям, разделяющимся в некоторой другой полярной системе координат.

В ряде частных случаев указанные предложения были получены ранее. Так, приведенные утверждения для периодических решений уравнения Матье получены референтом (Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1934, № 5, 295—349). В реферируемой статье соответствующие указания отсутствуют. *В. Д. Купрадзе*

4*

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4469. О некоторых теоремах Хилле и Тамаркина. Нараяна-Сингх (Sur quelques théorèmes de Hille et Tamarkin. Narayana Singh Udita), C. r. Acad. sci., 1953, 236, № 9, 885—887 (франц.)

Рассматривается обобщенное преобразование Фурье, введенное Карлеманом (Carleman T., L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent, Uppsala, 1944), и доказываются теоремы, аналогичные некоторым теоремам Пейли и Винера (Paley R. E., Wiener N., Fourier transforms in the complex domain, 1934) относительно преобразований Фурье в L_2.

Обозначается через $C(k)$ класс функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^x |f(\xi)|\,d\xi = O(|x|^k) \quad \text{при } |x| \to \infty.$$

Если, кроме того, аналогичная оценка имеет место при $|x| \to 0$, то будем считать, что функция принадлежит к классу $C'(k)$. Формулируются, в частности, следующие теоремы:

1. Если f — функция класса $C'(k)$, $(0 \leqslant k < 1)$, а $g_1(z)$, $g_2(z)$ — пара функций, голоморфных соответственно при $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$ и образующих обобщенное преобразование Фурье функции $f(x)$, т. е.

$$g_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} f(\xi)\, e^{-i\xi z} d\xi,$$

$$g_2(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} f(\xi)\, e^{-i\xi z} d\xi,$$

то для того чтобы $f(x)$ была предельной для функции, голоморфной в верхней полуплоскости и представляющейся в форме

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - z}\, dx,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{y \to +0} \{g_1(x + iy) - g_2(x - iy)\} = 0$$

равномерно в каждом интервале вида $a \leqslant x \leqslant b < 0$.

2. Пусть $\Phi(x)$ — неотрицательная неравная тождественно нулю функция из L_p $(1 \leqslant p < \infty)$.

Условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln \Phi(x)|}{1 + x^2}\, dx < \infty$$

есть необходимое и достаточное для того, чтобы существовала функция $f(x) \in L_p$ такая, что $|f(x)| = \Phi(x)$ почти всюду и для которой

$$\lim_{y \to +0} [g_1(x + iy) - g_2(x - iy)] = 0$$

равномерно в каждом конечном замкнутом интервале отрицательной полуоси.

Пейли и Винер доказали эту теорему для того случая, когда $\Phi(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, а Хилле и Тамаркин (Ann. Math., 1933, 34, 606—614) — для $\Phi(x) \in L_p$, но лишь при $1 \leqslant p \leqslant 2$. *Б. Я. Левин*

4470. Целые функции и обобщенное преобразование Фурье. Нараяна-Сингх (Fonctions entières et transformée de Fourier généralisée. Narayana Singh Udita), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 1, 14—16 (франц.)

Продолжение предыдущей заметки (см. реф. 4469).

Теорема 1. Если $f(x) \in C(k)$ $(0 \leqslant k < \infty)$, то для того чтобы $f(x)$ совпадала на вещественной оси с целой функцией $f(z)$ конечной степени, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{y \to +0} \{g_1(x + iy) - g_2(x - iy)\} = 0$$

равномерно на всяком конечном замкнутом интервале, не пересекающемся с некоторым интервалом $[-h', h]$. При этом

$$h = \overline{\lim_{y \to +\infty}} \frac{\ln |f(-iy)|}{y} \quad \text{и} \quad h' = \overline{\lim_{y \to +\infty}} \frac{\ln |f(iy)|}{y}.$$

Это — обобщение известной теоремы Пейли и Винера. Аналогичное обобщение дано Л. Шварцем (Schwartz L., Théorie des distributions, Paris, 1951). Более широкое обобщение дано И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым (Успехи матем. наук, 1953, 8, № 6(58), 3—54).

Формулируется следствие: если $f(z)$ — целая функция, причем

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} r^{-1} \ln^+ |f(re^{i\theta})| = 0 \qquad (1)$$

и $f(z) \in C(k)$ на некоторой прямой при некотором $k > 0$, то $f(z)$ — полином.

(Если потребовать, чтобы условие (1) выполнялось равномерно при $0 \leqslant \theta < 2\pi$, то теорема следует тривиально из принципа Фрагмена — Линделёфа; без этого дополнительного требования теорема неверна. *Прим. реф.*).

Далее утверждается теорема, аналогичная теореме 1, в которой вместо $f(x)$ рассматривается пара регулярных функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$, а $g_1(z)$ и $g_2(z)$ — обобщенное преобразование Фурье этой пары. Доказательства в обеих заметках отсутствуют. *Б. Я. Левин*

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

4471. Дифракция рентгеновских лучей на изогнутых кристаллах. Интегральная интенсивность отражения для метода на прохождение. Боровский И. Б., Безирганян П. А., Докл. АН СССР, 1953, 92, № 6, 1129—1132

На изогнутую кристаллическую пластинку падает с выпуклой стороны расходящийся пучок рентгеновских лучей. При подходящем расположении источника лучи, отраженные от различных радиальных атомных плоскостей изогнутого кристалла, фокусируются по другую сторону от последнего. Рассматривается приближенная теория этого явления, основанная на предыдущих работах авторов (Докл. АН

СССР, 1953, 88, № 4, 639—642; № 5, 769—772). Изогнутая кристаллическая решетка трактуется как совокупность одинаковых свободных зарядов, расположенных регулярно в узлах решетки. Отраженное поле строится как сумма сферических волн, представляющих собой результат независимого рассеяния падающей волны на каждом заряде. Малый эффект затухания падающей волны в толще кристалла оценивается. Суммы приближенно заменяются интегралами, которые вычисляются с использованием малости некоторых физических параметров. Приближенно полученная формула для интегральной интенсивности $I_{\text{изогн}}$ имеет тот же вид, что для случая плоского кристалла, отличаясь множителем; так что $I_{\text{изогн}}/I_{\text{плоск}} = N/q$, где N и q — число атомов, умещающихся вдоль дуги изогнутого кристалла и на линейном размере первой зоны Френеля для рентгеновских лучей. Для кристалла, размер которого по дуге равен нескольким сантиметрам, интегральная интенсивность отражения от изогнутого кристалла превышает интегральную интенсивность отражения от плоского кристалла приблизительно в 10^4 раз. Для получения результатов приходится производить оценки суммы S вида

$$S = \sum_{n=-N_0}^{N} e^{ic_2 R \sin(\gamma + n\varphi_0)} \frac{\sin\{Mac_2[\sin(\gamma + n\varphi_0)]/2\}}{\sin\{ac_2[\sin(\gamma + n\varphi_0)]/2\}}.$$

Г. Д. Малюжинец

4472. **Кручение призмы, ограниченной двумя пересекающимися круглыми цилиндрами.** Х у Х а й ч а н (圓弧二邊形柱體的扭轉問題 · 胡海昌), 物理學報 (Ули сюэбао, Acta phys. sinica), 1953, 9, № 4, 238—254 (кит., резюме англ.)

В первой части работы при помощи интегрального разложения Фурье дается решение задачи кручения для области, ограниченной дугами двух пересекающихся окружностей, уравнения которых в системе биполярных координат $x + iy = a\operatorname{th}[(\xi + i\eta)/2]$ будут $\eta = \beta_1$ и $\eta = \beta_2$. Указывается, что такое решение было известно и ранее (Уфлянд Я. С., Докл. АН СССР, 1949, 68, № 1, 17), однако форма решения (определенные интегралы с бесконечными пределами) неудобна для численных расчетов.

Вторая часть работы посвящена преобразованию интегралов

$$\int_0^\infty \frac{m \operatorname{sh} m\beta_1 \operatorname{ch} m(\beta_2 - \beta_1)}{\operatorname{sh} m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)}\, dm,$$

$$\int_0^\infty \frac{m \operatorname{sh}^2 m\beta_1 \operatorname{ch} m(\beta_2 - \beta_1)}{\operatorname{sh}^2 m\pi \operatorname{sh} m(\beta_2 - \beta_1)}\, dm,$$

через которые выражаются максимальное касательное напряжение и жесткость стержня, в ряды, осуществляемому при помощи теоремы о вычетах. Показано, что в случае, когда $(\beta_2 - \beta_1)/\pi$ — рациональное положительное число, интегралы выражаются через элементарные функции. *Я. С. Уфлянд*

4473. **Влияние эффекта Доплера и затухания на коэффициент поглощения спектральных линий и на прохождение излучения через атмосферу.** **П л а с с, Ф а й в е л** (Influence of Doppler effect and damping on line-absorption coefficient and atmospheric radiation transfer. P l a s s G i l b e r t N., F i v e l D a n i e l I.), Astrophys. J., 1953, 117, № 1, 225—233 (англ.)

Выводится представление коэффициента поглощения

$$k(\nu, a) = \frac{k_0 a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-x^2)}{a^2 + (\omega - x)^2}\, dx =$$

$$= \frac{k_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-ax - \frac{x^2}{4}\right) \cos \omega x\, dx$$

(где ν — частота излучения, ω — линейная функция ν, k_0 и a — постоянные) в виде ряда

$$k(\nu, a) = k_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \left\{ \exp(-\omega^2) H_n(\omega) \cos\frac{n\pi}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\sqrt{\pi}} F^{(n)}(\omega) \sin\frac{n\pi}{2} \right\}, \qquad (1)$$

где $H_n(\omega)$ — полиномы Эрмита,

$$F(\omega) = e^{-\omega^2} \int_0^\omega e^{x^2}\, dx.$$

Часть ряда (1), соответствующая четным значениям n, суммируется:

$$k(\nu, a) = k_0 \left\{ e^{a^2 - \omega^2} \cos 2\omega a - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} F^{(n)}(\omega) \sin\frac{n\pi}{2} \right\}.$$

Из асимптотического разложения Стокса для

$$\int_0^v e^{v^2 - t^2}\, dt - \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{v^2}$$

выводится асимптотическое разложение коэффициента поглощения:

$$k(\nu, a) - k_0 (\cos 2\omega a + \sin 2\omega a)\, e^{a^2 - \omega^2} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+n)!\, a^n \sin\frac{n\pi}{2}}{2^{2m} n!\, m!\, \omega^{2m+n+1}},$$

и результаты анализируются с точки зрения астрофизики. Аналогичные рассмотрения проводятся для функции

$$\tau(u_0, u_1) = \exp\left\{ -\sec\theta \int_{u_0}^{u_1} k(\nu, u, a)\, du \right\},$$

где u — оптическая прозрачность атмосферы.

В. И. Левин

4474 К. **Математика в применении к радио.** Т а н и м у р а (無線用數學 · 谷村功), 科學 (Кагаку), 1953, 23, № 9, 487 (библ.)

См. также: 4342, 4343, 4380, 4394, 4397, 4403, 4419 К, 4431, 4436, 4439, 4480, 4570, 4571, 4599, 4600, 4602 К, 4649

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

4475. Аналитические операции в вещественных пространствах Банаха. Алексевич, Орлич (Analytic operations in real Banach spaces. Alexiewicz Andrzej, Orlicz Władysław), Studia math. (Warszawa), 1953, **14**, № 1, 57—78 (англ.)

Авторы переносят развитую Э. Хилле в его монографии «Функциональный анализ и полугруппы» теорию аналитических функций в комплексных пространствах Банаха на случай вещественных банаховых пространств. Авторы в основном следуют идеям Хилле, изучая сначала степенные ряды с дискретными степенями, а затем переходя к случаю непрерывных степеней. Авторы доказывают, что всякий локально сходящийся в вещественном пространстве степенной ряд может быть расширен до комплексного локально сходящегося степенного ряда, однако они строят теорию вещественных степенных рядов независимо от теории комплексных степенных рядов. Основным приемом в доказательствах являются некоторые теоремы Ф. Леи (F. Leja) о многочленах. *R. Sikorski*

4476. Об определителях Лежанского для линейных уравнений в пространствах Банаха. Сикорский (On Leżański's determinants of linear equations in Banach spaces. Sikorski Roman), Studia math. (Warszawa), 1953, **14**, № 1, 24—48 (англ.)

Пусть φ — линейный функционал на алгебре Банаха $\mathfrak{A}$ (с единицей E) и пусть $A, B \in \mathfrak{A}$ удовлетворяют условию

$$\varphi(A_1 A_2 \dots A_n) = \varphi(A_2 \dots A_n A_1) \qquad (1)$$

для произвольной последовательности $A_i = A$ или B, $i = 1,2,\dots,n$. Если $\|A\| + \|B\| + \|AB\| < 1$, то $\varphi(\log((E+A)(E+B))) = \varphi(\log(E+A)) + \varphi(\log(E+B))$, где $\log(E+A)$ определен степенным рядом.

На основе сформулированной теоремы доказывается, что введенный референтом определитель линейного оператора в произвольном пространстве Банаха (Studia math. (Warszawa), 1953, **13**, 244—276; **14**, 13—23) является мультипликативным функционалом, т. е., говоря не вполне строго, определитель произведения двух операторов равен произведению определителей этих операторов. Эта теорема была доказана референтом для случая перестановочных операторов. Автор заменяет это условие некоторым условием типа (1), которое всегда выполняется в случае интегральных операторов в пространстве ограниченных измеримых функций и операторов в матричной форме в пространствах с базисом.

Работа содержит также изложение развитого референтом метода определителей в теории линейных уравнений в пространствах Банаха. Это изложение, однако, опирается на предположения, отличные от тех, которые принимались в работах референта. Вводя более симметричные предположения, автор исключил одну из аксиом, содержавшихся в более ранних работах, и получил полную симметрию результатов при исследовании линейного уравнения и уравнения, сопряженного с ним.

Как частный случай развитой теории, автор получает теорему Карлемана о том, что определитель Фредгольма уравнения

$$\varphi(s) + \lambda \int K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s),$$

где $\iint |K(s,t)|^2\,dt\,ds < +\infty$, является целой функцией от λ. *T. Leżański*

4477. Об умножении определителей в пространстве Банаха. Сикорский (On multiplication of determinants in Banach spaces. Sikorski Roman), Bull. Acad. polon. sci., 1953, **1**, № 6, кл. III, 219—221 (англ.)

Приведены формулировки основных результатов работы, помещенной в Studia math., 1953, **14**, 24—48 (см. реф. 4476). *T. Leżański*

4478. Проблема моментов для самосопряженных операторов. Надь (A moment problem for self-adjoint operators. Sz.-Nagy Béla), Acta math. Acad. sci. hung., 1952, **3**, № 4, 285—293 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.; резюме русск.)

Доказывается следующая теорема, эквивалентная теореме, недавно доказанной Кэдисоном (Kadison R. V., Ann. Math., 1952, **56**, 494—503): Пусть X — компактное множество на действительной оси, $A_0, A_1, A_2, \dots$ — ограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ такие, что

(α) если $c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n \geqslant 0$ на X, то $c_0 A_0 + c_1 A_1 + \dots + c_n A_n$ — положительно определенный оператор;

(β) $\|A_0\| \leqslant 1$.

Тогда $A_1^2 \leqslant A_2$.

Метод доказательства отличен от метода Кэдисона и основан на теореме референта (Изв. АН СССР, сер. матем., 1940, **4**, 277—318; Докл. АН СССР, 1943, **41**, 373—375) о представлении всякой обобщенной спектральной функции $F(x)$ в $\mathfrak{H}$ в виде $F(x) = P_+ E_+(x)$, где $E_+(x)$ — обычная спектральная функция в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_+ \supset \mathfrak{H}$, а P_+ — оператор проектирования пространства $\mathfrak{H}_+$ на $\mathfrak{H}$. Аналогичным методом доказывается, что все последовательности $A_0, A_1, A_2, \dots$, удовлетворяющие условию (α), получаются по формуле

$$A_k = A_0^{1/2} P_+ A_+^k A_0^{1/2}, \quad k = 0,1,2,\dots, \qquad (1)$$

где A_+ — ограниченный самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}_+ \supset \mathfrak{H}$ со спектром, содержащимся в X, а P_+ — оператор проектирования в $\mathfrak{H}_+$ на $\mathfrak{H}$.

В частности, для того чтобы все операторы

$$A_m - \binom{n}{1} A_{m+1} + \binom{n}{2} A_{m+2} + \dots + (-1)^n A_{m+n},$$
$$m, n = 0, 1, 2, \dots,$$

были положительно определенными, необходимо и достаточно, чтобы операторы A_k определялись

той же формулой (1), где A_+ — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}_+ \supset \mathfrak{H}$ со спектром, содержащимся в [0,1]. *М. А. Наймарк*

4479. О некоторых проблемах, касающихся операторов в гильбертовом пространстве. Шеффер (On some problems concerning operators in Hilbert space. Schäffer Juan J.), Anais. Acad. brasileira cienc., 1953, 25, № 1, 87—90 (англ.)

Исследуются некоторые свойства коммутаторов в кольце операторов в гильбертовом пространстве. Без доказательства приводятся следующие результаты:

1. Если $AB - BA = C$ и C коммутирует либо с A, либо с B, то C — необратимый оператор и, более того, является двусторонним обобщенным делителем нуля, т. е. существует такая последовательность D_n, что

$$\| D_n \| = 1, \lim_{n\to\infty} \| D_n C \| = \lim_{n\to\infty} \| C D_n \| = 0.$$

2. Если $AB - BA = A^n$, то A — обобщенный нульстепенный элемент, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \| A^n \|^{1/n} = 0.$$

3. Если $AB - BA = A$, то A — нульстепенный элемент. Приводится пример, опровергающий предположение о том, что расстояние от множества коммутаторов до единичного элемента $\geqslant 1$. Отмечается, что вышеприведенные результаты справедливы в банаховой алгебре.

Во второй части работы рассматривается вопрос о существовании обратимых операторов, не имеющих квадратного корня. В гильбертовом пространстве $L(D)$ аналитических функций, интегрируемых с квадратом в открытом ограниченном множестве D комплексной плоскости, рассматривается оператор

$$(Af)(t) = tf(t), \qquad (1)$$

спектр которого совпадает с замыканием $\overline{D}$ области D. Остаточный спектр этого оператора совпадает с внутренней частью области $\overline{D}$, причем дефектное число равно 1 (спектр и дефектные числа такого оператора в пространстве, являющемся замыканием в $L(D)$ пространства многочленов, рассмотрены в работе М. Г. Крейна и М. А. Красносельского (Успехи матем. наук, 1947, 2, № 3, (19), 60—106, в частности 65—67). *Прим. реф.*).

Приводится без доказательства утверждение: Оператор (1), отвечающий области D, имеет квадратный корень тогда и только тогда, когда D не окружает точки 0 (т. е. 0 и ∞ входят в одну и ту же компоненту дополнения D). Теорема верна для корней любой степени.

Если D окружает 0 и 0 является внешней точкой для D, то соответствующий оператор является обратимым, но не имеет корней.

Теорема остается справедливой для любого оператора, достаточно близкого к (1), а также вообще для оператора, остаточный спектр которого окружает точку 0, а соответствующее дефектное число равно 1. *Ю. Л. Шмульян*

4480. Разностные уравнения и J-матрицы. Ваук (Difference equations and J-matrices. Wouk Arthur), Duke Math. J., 1953, 20, № 2, 141—159 (англ.)

Рассматривается разностное уравнение

$$L_\lambda(x_n) = \Delta(p_n \Delta x_n) + (q_n + \lambda) x_{n+1} = 0,$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (1)$$

являющееся дискретным аналогом самосопряженного дифференциального уравнения 2-го порядка; при этом предполагается, что $p_n > 0$, q_n вещественны, а Δx_n обозначает $x_{n+1} - x_n$. На решение x_n накладывается начальное условие $ax_0 + bx_1 = 0$ с вещественными a и b.

Пусть $x = x(\lambda, \varphi)$ — решение уравнения (1) с граничным условием

$$x_0 \sin\varphi + x_1 \cos\varphi = 0, \qquad (2)$$

тогда $L_\lambda(x) = 0$ и это граничное условие порождают якобиеву матрицу $J(\varphi)$. Именно, если $\varphi \neq 0$, тогда исключаем x_0 из (2) и $L_\lambda(x_0) = 0$ и получаем систему уравнений

$$(q_0 + \lambda - p_0(1 + \operatorname{ctg}\varphi) - p_1) x_1 + p_1 x_2 = 0,$$
$$p_n x_n + (q_n + \lambda - p_n - p_{n+1}) x_{n+1} +$$
$$+ p_{n+1} x_{n+2} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

матрица этой системы уравнений для $\lambda = 0$ и есть $J(\varphi)$.

Пусть H обозначает гильбертово пространство всех последовательностей x_n, для которых $\| x \|^2 = \sum_0^\infty |x_n|^2 < \infty$. В ч. I статьи автор получает достаточные условия, при которых (1) не имеет двух линейно независимых решений, принадлежащих H (т. е. при которых оператор, порожденный матрицей J, самосопряженный), часть из которых известна, а часть аналогична соответствующим условиям для дифференциальных операторов. Например, такими достаточными условиями являются:

$$(a) \sum_{n=1}^\infty b_n^{-1} = \infty; \quad (b) \sum_1^\infty |a_{n+1}/b_n b_{n+1}| = \infty;$$
$$(c)\ a_{n+1} + b_n + b_{n+1} = O_R(1);$$
$$(d)\ a_{n+1} - b_n - b_{n+1} = O_L(1);$$
$$(e) \liminf_{n\to\infty} (\max(b_1, b_2, \ldots, b_n))\, n^{-1} < \infty,$$

где $a_n = J_{n,n}$, $b_n = J_{n,n+1}$.

В ч. II изучается совокупность J-матриц $J(\varphi)$, отвечающих всевозможным начальным условиям: $x_0 \sin\varphi + x_1 \cos\varphi = 0$, $0 \leqslant \varphi < \pi$.

Автор доказывает, что если все $J(\varphi)$ — самосопряженные матрицы, то каждое действительное λ принадлежит спектру по крайней мере одной из этих матриц, а изолированные собственные значения матрицы $J(\varphi)$ являются монотонными аналитическими функциями параметра λ.

Автор указывает, что этот результат Хартмана и Винтнера (Hartman P., Wintner A., Amer. J. Math., 1950, 72, 124—128) он получил независимо от этих авторов и что его доказательства проще. Этот результат обобщается далее на краевые условия вида $g(\lambda, t)x_0 + h(\lambda, t)x_1 = 0$, где t — параметр.

Кроме того, рассматривается соотношение между производным множеством $C(\varphi)$ совокупности точек спектра всех конечных отрезков матрицы $J(\varphi)$ и ее спектром, при этом известный вопрос о том, совпадает ли $C(\varphi)$ со спектром матрицы $J(\varphi)$ или нет, попрежнему остается открытым.

В ч. III изучается спектр самосопряженной матрицы $J(\varphi)$; получаемые при этом результаты довольно громоздки и не могут быть помещены в реферат; в частности, рассматривается случай периодического уравнения $L_\lambda(x)=0$. Полученные результаты применяются для вывода известных свойств периодических решений уравнения Матье. *М. А. Наймарк*

4481. Об одном классе операторов. Браун (On a class of operators. Brown Arlen), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 5, 723—726 (англ.)

Выясняется структура линейного ограниченного оператора A в гильбертовом пространстве H, перестановочного с оператором A^*A.

Пусть T — линейный оператор в некотором гильбертовом пространстве K, а $\tilde{K}$ — пространство, образованное всеми последовательностями $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(x_n \in K,\ \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2 < +\infty)$. Оператором расширенного сдвига называется оператор $\tilde{T}$, относящий последовательности $\{x_0, x_1, \ldots\}$ последовательность $\{0, Tx_0, Tx_1, \ldots\}$.

Доказывается следующая теорема:

Если оператор A перестановочен с оператором A^*A и Z — нулевое подпространство оператора A, то A есть прямая сумма операторов B и C, где C — нормальный оператор, а B — оператор, унитарно эквивалентный распространенному оператору сдвига, в котором $T = \sqrt{A^*A}$ на $H \ominus (Z \oplus \overline{A(H)})$ $\overline{A(H)}$ — замыкание $A(H)$). *М. С. Лившиц*

4482. О дифференциалах в банаховых пространствах. Алексевич, Орлич (On the differentials in Banach spaces. Alexiewicz Andrzej, Orlicz Władysław), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1952, **25**, 95—99 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Пусть F — оператор, отображающий открытое подмножество A действительного пространства Банаха X в действительное пространство Банаха Y. Если предел

$$\delta F(x, h) = \lim_{\tau \to 0} \frac{F(x+\tau h) - F(x)}{\tau} \qquad (1)$$

существует для любого $h \in X$, то $\delta F(x, h)$ называется квазидифференциалом оператора F в точке x. Если $\delta F(x, h)$ является линейной непрерывной функцией $h \in X$, то $\delta F(x, h)$ называется непрерывным дифференциалом Гато. Кроме того, если стремление к пределу в (1) является равномерным для $\|h\| \leqslant 1$, то непрерывный дифференциал Гато $\delta F(x, h)$ называется дифференциалом Фреше. Если пространство X сепарабельно, оператор F непрерывен и квазидифференциал $\delta F(x, h)$ существует для каждого $x \in A$, то непрерывный дифференциал Гато существует на множестве R, дополнение которого до A является множеством первой категории.

Существует оператор F, отображающий сепарабельное пространство Банаха в себя, удовлетворяющий условию Липшица, имеющий в каждой точке дифференциал Гато $\delta F(x, h)$ и непрерывный по x и h в совокупности, но не имеющий в каждой точке дифференциала Фреше. *R. Sikorski*

4483. Об одной теореме Б. Надь. Клиː (On a theorem of Béla Sz.-Nagy. Klee V. L., Jr.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 9, 618—619 (англ.)

Пусть M и N — множества в метрическом пространстве; отображение f множества M на N автор называет отображением Липшица, если $\sup\{\rho(fx, fy)/\rho(x, y):\ x, y \in M,\ x \neq y\} < \infty$ (по Б. Надь: dehnungsbeschränkt — с ограниченным растяжением).

Если B и C — ограниченные замкнутые выпуклые тела в линейном нормированном пространстве и θ (нуль пространства) — внутренняя точка каждого из них, то под радиальным проектированием B на C понимается отображение f, при котором пересечение каждого луча с вершиной в θ и множества B (отрезок $[\theta, x]$) отображается линейно на пересечение (отрезок $[\theta, y]$) того же луча и множества C ($f(\lambda x) = \lambda y$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$).

Доказывается теорема: если B и C — ограниченные замкнутые выпуклые тела в линейном нормированном пространстве, θ — внутренняя точка каждого из них, то радиальное проектирование B на C является отображением Липшица.

Эта теорема обобщает замечание Б. Надь о радиальном проектировании в конечномерном пространстве. *Г. Ш. Рубинштейн*

4484. Исследование векторов, неразложимых относительно некоторых конусов. Тагамлицкий (Изследване на вектори, които са неразложими относно някои конуси. Тагамлицки Я.), Изв. матем. ин-т (Бълг. АН), 1953, **1**, № 1, 57—68 (болг.; резюме русск.)

Через S_n (соответственно H_{2n}) обозначается совокупность всех векторов $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ (соответственно $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{2n})$), удовлетворяющих неравенству $\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n \geqslant 0$ (соответственно $\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_{2n} a_{2n} \geqslant 0$) всякий раз, когда $\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n \geqslant 0$ при $t \geqslant 0$ (соответственно $\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_{2n} t^{2n} \geqslant 0$ при $-\infty < t < \infty$). Вектор $\mathbf{a} \in S_n$ ($\mathbf{a} \in H_{2n}$) называется неразложимым относительно S_n (H_{2n}), если он отличен от нуль-вектора и не разлагается в сумму двух неколлинеарных векторов из S_n (H_{2n}). Так как S_n есть наименьший выпуклый замкнутый конус с вершиной в начале координат, содержащий кривую: $x_0 = 1$, $x_1 = t$, $x_2 = t^2, \ldots, x_n = t^n$ (Крейн М., Успехи матем. наук, 1951, **6**, № 4 (44), 1—88), то для того чтобы вектор $\mathbf{a}$ был неразложим относительно S_n, необходимо и достаточно, чтобы либо $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$, $a_n > 0$, либо $a_k = Aq^k$, $A > 0$, $q > 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Аналогичную характеристику можно дать векторам, неразложимым относительно H_{2n}. Основной результат статьи — элементарное алгебраическое доказательство этих геометрически очевидных характеристик векторов, неразложимых относительно S_n и H_{2n}. *М. Г. Крейн*

4485. Обобщенные l^p пространства и свойство Шура. Гальперин, Накано (Generalized l^p spaces and the Schur property. Halperin I., Nakano H.), J. Math. Soc. Japan, 1953, 5, № 1, 50—58 (англ.)

Пусть $J=\{\alpha\}$ — множество индексов и пусть $p=p(\alpha)$ и $w=w(\alpha)$ — две J-последовательности ($p(\alpha)\geqslant 1$, $w(\alpha)>0$; $\alpha\in J$). Обозначим $l(p, w)$ совокупность всех комплекснозначных J-последовательностей $x=x(\alpha)$, для которых $\|x\|<\infty$, где

$$\|x\|=\inf \eta;\ \sum_{\alpha\in J} w(\alpha)\left|\frac{x(\alpha)}{\eta}\right|^{p(\alpha)}\leqslant 1.$$

$l(p, w)$ при любых p и w является банаховым пространством.

Доказывается, что необходимым и достаточным условием равносильности слабой сходимости и сходимости по норме (свойство Шура) в $l(p, w)$ является наличие лишь конечного числа таких $\alpha\in J$, что $p(\alpha)>1+\varepsilon$, каково бы ни было заданное наперед $\varepsilon>0$.

Для пространства l^1 совпадение слабой сходимости со сходимостью по норме известно (Schur J., J. reine und angew. Math., 1921, 151). В статье строится пример пространства, неизоморфного l^1, также обладающего этим свойством.

Приведенные результаты (за исключением необходимости условия) были получены ранее Накано при помощи более сложных средств (Nakano H., Proc. Japan Acad. Sci., 1951, 27, 508—512). В конце статьи указываются возможные обобщения, не связанные с существенным изменением доказательств. Например, можно считать, что $x(\alpha)\in B(\alpha)$, где $B(\alpha)$ — произвольные банаховы пространства.

Замеченные опечатки: в формулировке следствия к лемме 3 и в доказательстве теоремы 1 даются ссылки на лемму 1, в то время как нужно ссылаться на лемму 3. *Г. П. Акилов*

4486. Представление линейных функционалов в пространствах Кёте. Лоренц, Уэртхейм (Representation of linear functionals on Köthe spaces. Lorentz G. G., Wertheim D. G.), Canad. J. Math., 1953, 5, № 4, 568—575 (англ.)

Вещественное пространство Кёте $X=X_C$ определяется как пространство, состоящее из всех вещественных измеримых функций $f(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$, для которых

$$\|f\|_X=\sup_{c\in C}\int_0^1 |f(t)|\,c(t)\,dt<+\infty,$$

где C — заданное множество положительных суммируемых функций, удовлетворяющее некоторым определенным условиям. При естественном упорядочении X оказывается K-пространством и одновременно пространством типа (B) с монотонной нормой ($|f|\leqslant|g|$ влечет $\|f\|\leqslant\|g\|$).

Дуальное пространство X' определяется как множество всех измеримых функций $g(t)$, для которых

$$\|g\|_{X'}=\sup_{f\in X,\ \|f\|\leqslant 1}\int_0^1 |g(t)||f(t)|\,dt<+\infty.$$

X' — также пространство Кёте и является подпространством сопряженного пространства X^*.

Векторное пространство Кёте $X(B)$, где B — пространство типа (B), определяется как множество всех функций $f(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ со значениями в B, слабо измеримых и таких, что $\|f(t)\|$ входит в вещественное пространство Кёте X. Норма в $X(B)$ определяется формулой

$$\|f\|_{X(B)}=\sup_{c\in C}\int_0^1 \|f(t)\|\,c(t)\,dt.$$

Основной результат:

Пусть B и $X(B)$ сепарабельны (в статье указывается некоторое условие, накладываемое на X, при котором $X(B)$ сепарабельно), а $X'=X^*$. Общий вид линейных функционалов $L(f)$ в $X(B)$ дается формулой

$$L(f)=\int_0^1 g_t(f_t)dt,$$

где векторная функция g_t входит в пространство Кёте $X^*(B^*)$. При этом $\|L\|=\|g\|$ (индекс t означает аргумент).

Предварительно доказывается теорема об общей форме операторов класса H_B^0, отображающих сепарабельное пространство типа (B) в вещественное пространство Кёте X, обобщающая теорему Л. В. Канторовича и референта, доказанную ими для случая $X=L^p$ (Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах, Гостехиздат, М. — Л., 1950, 330). *Б. З. Вулих*

4487. Об одной теореме о минимаксе и ее приложениях к функциональному анализу. Никаидо (On a minimax theorem and its applications to functional analysis. Nikaidô Hukukane), J. Math. Soc. Japan, 1953, 5, № 1, 86—94 (англ.)

На произведении выпуклых множеств X и Y, соответственно принадлежащих вещественному линейному топологическому пространству E и вещественному линейному (необязательно топологическому) пространству F, рассматривается вещественная функция $K(x, y)$; $x\in X\subset E$, $y\in Y\subset F$. Множество X считается компактным. Предполагается, что $K(x, y)$ удовлетворяет условиям:

(I) $K(x, y)$ непрерывна по x при каждом фиксированном y.

(II) $K(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2, y)\geqslant\alpha_1K(x_1, y)+\alpha_2K(x_2, y)$ для $\alpha_1\geqslant 0$, $\alpha_2\geqslant 0$, $\alpha_1+\alpha_2=1$, $x_1, x_2\in X$, $y\in Y$.

(III) $K(x, \beta_1y_1+\beta_2y_2)\leqslant\beta_1K(x, y_1)+\beta_2K(x, y_2)$ для $\beta_1\geqslant 0$, $\beta_2\geqslant 0$, $\beta_1+\beta_2=1$, $y_1, y_2\in Y$, $x\in X$.

При выполнении перечисленных условий доказывается

Теорема 1. Если $\sup\limits_{x\in X}\inf\limits_{y\in Y}K(x, y)$ конечен, то

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}K(x, y)=\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}K(x, y). \qquad (1)$$

Доказательство элементарно. Автор отмечает, что аналогично доказывается

Теорема 2. Пусть E есть линейное (необязательно топологическое) пространство, а F есть линейное топологическое пространство, причем множество $Y \subset F$ компактно. Тогда, если $K(x, y)$ непрерывна по $y \in Y$ при каждом фиксированном $x \in X$ и удовлетворяет условиям (II) и (III), то из конечности $\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y)$ следует соотношение (1).

Эти теоремы используются для доказательства теоремы Мазура: если M — замкнутое выпуклое множество в линейном нормированном пространстве E, то какова бы ни была точка $a \notin M$, существует такой ограниченный линейный функционал $f \in E^*$, что $\sup_{x \in M} f(x) < f(a)$, а также для доказательства некоторых предложений о регулярности вещественных банаховых пространств. Из этих предложений приведем следующие:

1. Если единичная сфера пространства E слабо компактна, то E регулярно.

2. Из равномерной выпуклости пространства E следует его регулярность. Отметим, что данную теорему впервые доказал Д. П. Мильман (Докл. АН СССР, 1938, 20, 243—246). Некоторые условия автор формулирует в терминах теории игр. *М. М. Вайнберг*

4488. О свойстве распространимости нормированных пространств над полем с неархимедовской нормой. Оно (On the extension property of normed spaces over fields with non-archimedean valuations. Ono Takashi), J. Math. Soc. Japan, 1953, 5, № 1, 1—5 (англ.)

Пусть S — линейное пространство над некоторым полным полем K с нетривиальной дискретной нормой. Вещественное положительное число, являющееся нормой элемента $\alpha \in K$, будем обозначать символом $|\alpha|$. Как известно, такая нормировка K является неархимедовской, т. е. удовлетворяет неравенству $|\alpha_1 + \alpha_2| \leqslant \max(|\alpha_1|, |\alpha_2|)$. Пусть для каждого элемента $x \in S$ определено вещественное положительное число $\|x\|$, обладающее свойствами: 1) $\|x\| \geqslant 0$, $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$; 2) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, 3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

Такое пространство S автор, следуя Артину (E. Artin), называет нормированным пространством, а линейное непрерывное отображение S в K называет линейным функционалом. Каждый линейный функционал $f(x)$ является ограниченным, поэтому обычным способом можно определить $\|f\|$, превратив сопряженное пространство S^* в нормированное.

Пространство S обладает свойством распространимости, если для любого подпространства $S_0 \subset S$ и любого $f_0 \in S_0^*$ существует функционал $f \in S^*$, совпадающий на S_0 с f_0, и такой, что $\|f\| = \|f_0\|$.

Доказывается следующая теорема: для того чтобы S обладало свойством распространимости, необходимо и достаточно, чтобы S было неархимедовским, т. е. вместо 2) выполнялось неравенство $\|x + y\| \leqslant \max(\|x\|, \|y\|)$. *А. Н. Балуев*

4489. Пространства функций, определенные сглаженной функцией длины. Эллис, Гальперин (Function spaces determined by a levelling length function. Ellis H. W., Halperin Israel), Canad. J. Math., 1953, 5, № 4, 576—592 (англ.)

Эта статья является развитием и обобщением статьи одного из авторов (Halperin, РЖМат, 1954, 2245). Используем обозначения указанного реферата: S — пространство с мерой γ; e — измеримое множество с конечной $\gamma(e)$; $f(P)$, $v(P)$ и $u(P)$ — измеримые на S функции; $v(P)$ и $u(P)$ почти всюду неотрицательны; сохраняем обозначения $\|u\|_p$, $[v]_q$, $L^{(p)}_{(w)}$ и M.

Вводится «функция длины» («length function») $\lambda(u)$, определенная для каждой измеримой функции u такой, что почти всюду $0 \leqslant u(P) \leqslant \infty$, причем $0 \leqslant \lambda(u) \leqslant +\infty$, и удовлетворяющая условиям: 1) $\lambda(u) = 0$, если $u(P) = 0$ почти всюду; 2) $\lambda(u_1) \leqslant \lambda(u_2)$, если $u_1(P) \leqslant u_2(P)$ всюду; 3) $\lambda(u_1 + u_2) \leqslant \lambda(u_1) + \lambda(u_2)$; 4) $\lambda(ku) = k\lambda(u)$ при $k > 0$; 5) если последовательность $\{u_n\}_{1 \leqslant n < \infty}$ неубывающая, то $\lambda[\sup_n u_n(P)] = \sup_n \lambda(u_n)$.

Если $|f(P)|$ измерима, то полагается $\lambda(f) = \lambda(|f|)$. L^λ обозначает пространство измеримых числовых функций с конечным $\lambda(f)$. $L^\lambda(B)$ обозначает пространство функций на S со значениями в пространстве Банаха B, с конечным $\lambda(f) = \lambda(\|f(P)\|)$, и измеримых по Бохнеру ($f(P)$ называется измеримой по Бохнеру, если для каждого e и каждого числа n имеется конечнозначная функция $f_1(P)$ такая, что $\gamma[\|f(P) - f_1(P)\| \geqslant 1/n, P \in e] > 1/n$). Для $L^\lambda(u\, L^\lambda(B))$ отождествляются функции $f(P)$ и $f_1(P)$, если $\lambda(u) = 0$ каждый раз, когда $u(P) = 0$ на множестве точек, где $f(P) \neq f_1(P)$. Доказывается, что L^λ, $L^\lambda(B)$ являются пространствами Банаха с нормой $\lambda(f)$. Вводится сопряженная функция длины $\lambda^*(v)$

$$\lambda^*(v) = \sup_{\lambda(u) \leqslant 1} \int_S u(P)\, v(P)\, d\gamma(P).$$

Примерами $\lambda(u)$ и $\lambda^*(v)$ могут служить $\|u\|_p$ и $[v]_q$ в пространствах $L^p_{(w)}$ и M. Ниже u_e обозначает u для $P \in e$ и нуль вне e. $\lambda(u)$ называется непрерывной, если 6) $\lambda(u) = \sup_e \lambda(u_e)$. Если заданы $\{e_i\}$ и числа $\{k_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, то $k_{e,i}$ обозначает функцию, равную нулю вне e_i и равную k_i на e_i, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Непрерывная функция длины $\lambda(u)$ называется сглаженной, если выполняется: 7) $\lambda(1_e) < \infty$ для некоторого e положительной меры и $\lambda(1_e) > 0$ для некоторого e,

$$8)\ \lambda\left(\sum_{i=1}^{m} k_{e,i}\right) \geqslant \lambda\left[\left(\frac{k_1\gamma(e_1) + k_2\gamma(e_2)}{\gamma(e_1 + e_2)}\right)_{e_1+e_2} + \sum_{i=3}^{m} k_{e,i}\right]$$

для $m \geqslant 2$, не пересекающихся e_i положительной меры и неотрицательных k_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Ниже $\lambda(u)$ означает сглаженную функцию длины. Доказывается

Теорема 4. I. (*i*) $\lambda^{**}=\lambda$; (*ii*) λ^* является сглаженной функцией длины; (*iii*) $\int_S u(P)\,v(P)\,d\gamma(P)\leqslant \lambda(u)\,\lambda^*(v)$ и точная верхняя грань левой части при $\lambda^*(v)\leqslant 1$ совпадает с $\lambda(u)$. Отсюда вытекает, что $\lambda(1_e)$. $\lambda^*(1_e)=\gamma(e)$.

Функция $g(P)$ со значениями в B^* называется B^*B-интегрируемой, если $g(P)c$ измерима и интегрируема на каждом e и для каждого $c\in B$. При некоторых дополнительных ограничениях на S и на $\lambda(u)$ доказывается:

Если B сепарабельно, то соотношение

$$\Phi(f)=\int_S g(P)\,f(P)\,d\gamma(P) \quad \text{для каждого } f\in L^\lambda(B)$$

устанавливает взаимно однозначное и линейное соответствие между $\Phi\in L^\lambda(B)^*$ и B^*B-интегрируемой функцией $g(P)$ с конечным $\lambda^*(g)$; при этом $\|\Phi\|=\lambda^*(g)$.

Из этой теоремы получен ряд следствий для более частных случаев. Например, если равенство $L^\lambda(B)^*=L^\mu(B^*)$, где $\mu=\lambda^*$, выполняется для одного из λ, тогда оно верно для любого λ; в частности, это равенство верно, если B рефлективно. Авторы отмечают, что применительно к случаю классического $L^p(B)$ их методы имеют близкое отношение к ряду работ других авторов; в частности, отмечается статья Бохнера и Тейлора (Bochner S., Taylor A. E., Ann. Math., 1938, **39**, 913—944). *Д. П. Мильман*

4490. Замечания о выпуклости связных множеств. Тамура (Remarks on the convexity of connected sets. Tamura Takayuki), J. Gakugei Tokushima Univ., 1953, **3**, 24—27 (англ.)

Основная теорема утверждает, что если M — связное, локально выпуклое подмножество действительного сепарабельного банахова пространства, то его внутренняя часть относительно наименьшего содержащего его линейного пространства либо пуста, либо выпукла. Статья продолжает более раннюю заметку (J. Gakugei Tokushima Univ., 1950, **1**, 25—30). *М. М. Дау*

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 11, 1093.

4491. Об ортогональных вероятностных мерах. Берджер (On orthogonal probability measures. Berger Agnes), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 5, 800—806 (англ.)

Пусть L — борелевское поле подмножеств B множества X, а M — семейство всех вероятностных мер (т. е. счетно-аддитивных, неотрицательных функций множества $m(B)$, для которых $m(X)=1$), определенных на L. Обобщая определение ортогональности двух мер, данное в работе Какутани (Kakutani S., Ann. Math., 1948, **49**, 214—224), автор вводит следующее определение:

Два множества M и M' из M называются ортогональными, если существует такое $B\in L$, что $m(B)=0$ для всех $m\in M$, в то время как $m'(B)=1$ для всех $m'\in M'$. Очевидно, что если M и M' ортогональны, то ортогональны и любые две меры m и m' из этих множеств, в то время как обратное утверждение не имеет места. В работе получен ряд условий, достаточных для того, чтобы два непересекающихся множества M и M' или множества $\overline{M}$ и $\overline{M'}$, составленные из бесконечных прямых степеней мер, входящих в M и M', были ортогональны. *А. А. Петров*

4492. Квантовая теория поля в свете теории распределений. Гюттингер (Quantum field theory in the light of distribution analysis. Güttinger Werner), Phys. Rev., 1953, **89**, № 5, 1004—1019 (англ.)

Теория распределений (Schwartz L., Théorie des distributions, Paris, 1950—1951) применяется к математическим задачам квантовой теории поля. Распределением $T(\varphi)$ называется линейный функционал, определенный в пространстве непрерывных комплексных бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, каждая из которых равна нулю вне некоторого интервала. Определенное распределение можно сопоставить любой суммируемой функции $f(x)$, полагая

$$f(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx. \qquad (1)$$

Существуют, однако, распределения, не порождающиеся какими-либо функциями «классического анализа», например «δ-распределение»: $\delta(\varphi)=\varphi(0)$. Это позволяет математически корректно рассматривать и «сингулярные функции», используемые в квантовой теории поля.

В статье излагаются основы теории распределений (для функций одного переменного); в частности, определяется производная от распределения и показывается, что

$$D[T(\varphi)]=-T(\varphi'),$$

где φ' — обычная производная от функции $\varphi(x)$. Для распределений, порождаемых функциями $f(x)$ с суммируемыми производными «дистрибуционное дифференцирование» сводится к обычному:

$$D[f(\varphi)]=[f'(x)](\varphi). \qquad (2)$$

Однако «дистрибуционные производные» всех порядков существуют и тогда, когда производные от $f(x)$ не суммируемы, а также когда распределение вообще не связано с какой-либо «регулярной» функцией $f(x)$. Существенно, что и тогда, когда (2) не имеет места, можно выразить $D[T(\varphi)]$ в виде линейного функционала от самой функции $\varphi(x)$, а не от ее производных. Так, например, вводя обозначения

$$(1/\alpha x^\alpha)_+=\begin{cases}1/\alpha x^\alpha & \text{при } x>0\\ 0 & \text{при } x<0,\end{cases}$$

где $0<\alpha<1$, автор показывает, что

$$D[(1/\alpha x^\alpha)_+(\varphi)]=-\mathrm{Pf}\,\{(x^{-\alpha-1})_+(\varphi)\},$$

где операция, обозначаемая символом Pf («псевдофункция»), определяется следующим образом:

$$\mathrm{Pf}\,\{(x^{-\alpha-1})_+(\varphi)\}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_\varepsilon^\infty x^{-\alpha-1}\varphi(x)\,dx-(1/\alpha)\,\varepsilon^{-\alpha}\varphi(0)\right\}. \qquad (3)$$

Именно во введении и систематическом использовании операции Pf, позволяющей, по выражению автора, «рассматривать сингулярные функции в самих особенностях», и заключается, повидимому, основная идея реферируемой работы. Правила оперирования с выражениями, содержащими символы Pf, в частности правила дифференцирования, во многом аналогичны правилам обычного дифференциального исчисления функций, в некоторых случаях при выполнении операции Pf появляются произвольные постоянные («постоянные нормировки»), связанные с неинвариантностью некоторых интегралов относительно «преобразования расширения»: $x \to \lambda x$, где x — переменная интегрирования, λ — произвольная постоянная. (С точки зрения обычного анализа соответствующие интегралы расходятся; в теории распределений они получают точный смысл, но содержат произвольные элементы.) Далее рассматривается проблема деления. В алгебре распределений деление не однозначно. Указывается следующая теорема (Schwartz, цит. соч., 1, 121): если S—произвольное распределение, то общее решение уравнения $xT = S$ имеет вид $T = S/x + c\delta$, где c — произвольная комплексная «постоянная деления».

Развитая теория применяется для исследования задач квантовой теории поля (детально рассматриваются описываемые диаграммами с замкнутыми петлями процессы взаимодействия бозонов через виртуальные пары фермионов). Автор указывает, что большинство величин, фигурирующих в математическом аппарате квантовой теории поля (в том числе и элементы матрицы S), фактически следует рассматривать как распределения, и многие соотношения между сингулярными функциями, будучи рассматриваемы как «дистрибуционные», приобретают точный смысл лишь при использовании операции Pf. При этом, из-за неоднозначности деления, в ряде соотношений появляются не учитывавшиеся ранее произвольные элементы. Так, например, обычно используемое соотношение

$$[\delta(x)\,y^{-1} + \delta(y)\,x^{-1}] = [\delta(x) - \delta(y)](y-x)^{-1}$$

фактически следует писать в виде

$$\mathrm{Pf}\,[\delta(x)\,y^{-1} + \delta(y)\,x^{-1}] = [\delta(x) - \delta(y)]\,\mathrm{Pf}\,(y-x)^{-1} + f(x)\,\delta(y-x), \qquad (4)$$

где $f(x)$ — произвольная функция.

Показывается, что при использовании теории распределений все расходящиеся в обычной теории величины оказываются сходящимися; однако они всегда содержат произвольные постоянные деления и нормировки (появляющиеся всегда совместно). Последние, по утверждению автора, можно исключить путем обычной перенормировки массы и заряда, и в этом смысле автор не видит разницы между «перенормируемыми» и «неперенормируемыми» теориями. Указывается, что постоянные нормировки можно формально интерпретировать как фейнмановские «константы обрезания», фактически, однако, их математическое происхождение различно.

В заключение указывается, что все же отнюдь не все результаты теории оказываются однозначными. Особенно важную роль в этом отношении играют произвольные константы и функции, появляющиеся в равенствах типа (4). Иногда их удается исключить при помощи некоторых дополнительных условий (например, условия калибровочной инвариантности), но это возможно не всегда. В частности, например, вполне произвольным оказывается матричный элемент для распада скалярного τ-мезона, скалярно связанного с нуклонным полем, на два псевдоскалярных π-мезона с псевдоскалярной связью (при использовании обычного формализма этот матричный элемент расходится). По мнению автора, неопределенность некоторых эффектов, связанная с наличием «нормировочных констант», обусловлена излишне идеализированным представлением о точной локализуемости величин поля.

Примечание референта. Автор не цитирует опубликованных еще в 1951—1952 гг. работ Н. Н. Боголюбова (Докл. АН СССР, 1951, 81, № 5, 6; 1952, 82, № 2, 217), в которых было указано, что если отказаться от представления о волновой функции в данный момент времени, задавая вместо этого состояние системы в «пространственно-временной области с размытыми границами», и корректно определить правила обращения с сингулярными функциями, рассматривая их как ядра некоторых линейных функционалов, то все матричные элементы в современной квантовой теории поля делаются конечными и содержат лишь произвольные постоянные (но не функции). *В. Б.-В.*

4493. Проблема замены переменных в теории распределений (II). Альбертони, Куджани (Sul problema del cambiamento di variabili nella teoria delle distribuzioni (II). Albertoni S., Cugiani M.), Nuovo cimento, 1953, **10**, № 2, 157—173 (итал.)

Пусть F_x — некоторое распределение, определенное как линейный функционал в пространстве бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, каждая из которых равна нулю вне некоторого интервала, а $u(x)$ — определенная на вещественной оси непрерывная функция, имеющая однозначную бесконечно дифференцируемую обратную функцию $x(u)$. Тогда можно определить преобразованное распределение

$$T_u\{\varphi(x)\} = T_u\{\varphi(x(u))\,|\,x'(u)\,|\}.$$

Аналогично вводятся преобразованные распределения и в пространстве функций φ, зависящих от нескольких переменных; например, если $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, то

$$T_{uv}\{\varphi(x, y)\} = T_{uv}\{\varphi(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J|\}, \qquad (1)$$

где J — якобиан от старых переменных по новым.

Исследуются правила дифференцирования преобразованных распределений, причем они оказываются вполне аналогичными соответствующим правилам дифференцирования сложных функций.

Результаты обобщаются на случай преобразований, подчиненных менее жестким условиям; в частности, подробно рассматривается следующий пример: $x = \pm\sqrt{u + v^2}$; $y = v$. В этом случае формально применим закон преобразования (1), но, поскольку якобиан может иметь особенность в некоторых точках плоскости (u, v), распределение определяется сначала не на всем пространстве функций φ, а на более узком классе функций, обращающихся в нуль (в случае необходимости — вместе с должным числом своих производных) в особых точках якобиана. Доказывается, что построенные таким образом линейные функционалы можно расширить на все пространство функций φ; однако расширенные распределения содержат,

вообще говоря, произвольные элементы (произвольные константы или распределения).

Полученные результаты применяются для доказательства некоторых формул с дельта-функциями, которые используются в квантовой электродинамике. *В. Б.-Б.*

4494. Спин и орбитальный момент количества движения в общей теории относительности. Бергман, Томсон (Spin and angular momentum in general relativity. Bergmann Peter G., Thomson Robb), Phys. Rev., 1953, 89, № 2, 400—407 (англ.)

Известно, что при общековариантной формулировке уравнений для спинорных полей в пространстве Римана метрика вводится не при помощи метрической матрицы g_{ik}, как обычно, а при помощи задания в каждой точке пространства локальных ортогональных реперов. Это влечет за собой не только инвариантность уравнений относительно группы общих точечных преобразований, из которой следуют законы сохранения энергии и импульса, но также инвариантность относительно группы локальных вращений реперов. Авторы показывают, что инвариантность уравнений относительно преобразований последней группы приводит к установлению закона сохранения для полного момента количества движения, который является суммой орбитального момента количества движения и спина. *Ю. Р.*

4495. Калибровочная инвариантность и классическая электродинамика. Моц (Gauge invariance and classical electrodynamics. Motz Lloyd), Phys. Rev., 1953, 89, № 1, 60—66 (англ.)

При помощи обычного эйнштейновского тензора $C_{\mu\nu}$ строится калибровочно-инвариантный (в смысле теории Вейля) тензор $\mathfrak{G}_{\mu\nu}$, причем его симметричная часть отождествляется с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$, а антисимметричная — с тензором электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$; определяется плотность лагранжиана $L=(-|\mathfrak{G}_{\mu\nu}|)^{1/2}$, где $|\mathfrak{G}_{\mu\nu}|$ — детерминант, связанный с тензором $\mathfrak{G}_{\mu\nu}$. В отличие от работы Борна и Инфельда (Born M., Infeld L., Proc. Roy. Soc., 1934, **A144**, 425), в которой непосредственная вариация L приводила к системе нелинейных уравнений, автор предварительно рационализирует L при помощи матриц Дирака и из полученного таким образом лагранжиана выводит систему линейных уравнений, аналогичную рассмотренной Дираком (Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., 1951, **A209**, 291) и переходящую в обычные уравнения Максвелла—Лоренца в случае слабых полей. Введение в теорию матриц Дирака требует предположения о существовании добавочных степеней свободы у поля. Полученные уравнения автор решает для статического случая и получает конечную собственную энергию точечного заряда. В теорию не входят новые произвольные константы. Поскольку гамильтониан поля не содержит иррациональностей, возможен переход к квантовой теории. *Г. Ж.*

4496. Новая классическая электродинамика. Мелвин (The new classical electrodynamics. Melvin Avram y M.), Nature, 1953, **171**, № 4359, 890—892 (англ.)

Предлагается обобщение появившейся недавно новой теории Дирака (Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., 1951, **A209**, 291; 1952, **A212**, 330; Nature, 1951, **168**, 906; 1952, **169**, 146). Теория Дирака, за исключением калибровочного условия, соответствует естественной форме электродинамики Максвелла — Лоренца для частиц с постоянной массой и зарядом. Такого рода теория не может охватить всех случаев, в частности не может в статическом виде описать заряженный диэлектрик. Вместо этого автор предлагает теорию (называемую теорией обобщенных потоков), в которой заряд ε и масса μ частиц потока переменны в пространстве-времени.

Изложение этой теории будет сделано позднее. В настоящей работе автор находит лишь ряд следствий уравнений движения и калибровочного условия

$$A_{\alpha\beta}v^{\beta}=-k\frac{dv_{\alpha}}{ds}=-kv_{\alpha,\,\beta}v^{\beta}, \tag{1}$$

$$A_{\alpha}v^{\alpha}=k, \tag{2}$$

где A_{α} — 4-потенциал, v^{α} — 4-скорость, $k=\mu c^2/\varepsilon$, $A_{\alpha\beta}=A_{\beta,\,\alpha}-A_{\alpha,\,\beta}$ — тензор электромагнитного поля. Если ввести «кинетическое поле» $V_{\alpha}\equiv kv_{\alpha}$ и поле потока $S_{\alpha}\equiv A_{\alpha}-V_{\alpha}$, то можно показать, что

$$S_{\alpha\beta}V^{\beta}=0, \tag{3}$$

$$S_{\alpha}V^{\alpha}=0. \tag{4}$$

Дополнительное условие связывает A_{α} с v^{α} и, следовательно, с 4-мерным током классической электродинамики, который можно написать в виде:

$$J^{\alpha}=N_{\varepsilon}v^{\alpha}\equiv\lambda V^{\alpha}/c^2,$$

где $\lambda\equiv N\varepsilon^2/\mu$. В частности, при $V_{\alpha}=A_{\alpha}$ получается первый вариант теории Дирака, который можно назвать «сверхпроводящей» теорией, так как ее уравнения совпадают с уравнениями электродинамики сверхпроводников Лондона.

Из (3), (4) следует, что все мировые линии частиц потока, проходящие через данную точку, должны лежать в двумерной поверхности Σ, перпендикулярной пространственно-подобной плоскости $S_{\alpha\beta}$ в данной точке. Это не есть ограничение, так как сама $S_{\alpha\beta}$ в данной точке не определяется однозначно и зависит от скорости и ее производных. Поэтому множество траекторий, проходящих через данную точку, не меньше, чем в обычной теории Лоренца.

В «сверхпроводящей» теории Дирака имеется гораздо большее ограничение распределения скоростей в заданном электрическом поле. Возникает проблема собственных функций, которая будет рассмотрена в дальнейшем. *А. А.*

4497. Однородные кольца функций. Шилов (Homogeneous rings of functions. Šilov G. E.), Amer. Math. Soc. Translation, № 92, 1953, 65 pp. (англ.)

Перевод из журнала «Успехи матем. наук», 1951, **6**, № 1(41), 91—137.

Перевод из Math. Rev., 1954, **15**, № 1, 40.

4498. Д. Исследование дифференциальных свойств функций линейных операторов, зависящих от параметра. Далецкий Ю. Л. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Киевский ун-т, Киев, 1954

4499 Д. Исследование некоторых итерационных процессов. Костарчук В. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Житомирский гос. пед. ин-т, Житомир — Кривой Рог, 1953

См. также: 4359, 4363, 4364, 4399 Д, 4427

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

4500. К вопросу о применимости центральной предельной теоремы к цепям Маркова. Широкорад Б. В., Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, 18, № 1, 95—104

Рассматривается последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ случайных величин, с двумя возможными значениями 0 и 1, связанных по схеме неоднородных цепей Маркова. При этом вероятности перехода $P(\xi_{n+1}=1/\xi_n=0)=a_n$ и $P(\xi_{n+1}=0/\xi_n=1)=b_n$ считаются заданными.

Изучается предельное поведение распределения вероятностей случайной величины $\zeta_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$ при $n\to\infty$ при условии $a_n\sim an^{-\alpha}$, $b_n\sim bn^{-\beta}$ $(a>0,\ b>0)$; $0<\alpha\leqslant\beta\leqslant 1$.

Доказывается:

1. Если $\alpha\leqslant\beta<1$, то при $n\to\infty$

$$P\left(\frac{\zeta_n-M\zeta_n}{\sqrt{D\zeta_n}}<t\right)\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-t^2/2}dt;$$

здесь M и D — знаки математического ожидания и дисперсии соответственно.

2. Если $\alpha<\beta=1$, то

$$P\left(\frac{\zeta_n}{n^\alpha}<t\right)\to a^{b/\alpha}\Gamma^{-1}\left(\frac{b}{\alpha}\right)\int_0^t t^{(b/\alpha)-1}e^{-at}dt,\ t\geqslant 0;$$

здесь $\Gamma(x)$ есть гамма-функция.

3. Если $\alpha=\beta=1$, то,

$$P\left(\frac{\zeta_n}{n}<t\right)\to B^{-1}(a,\ b)\int_0^t t^{b-1}(1-t)^{a-1}dt,\ 0\leqslant t\leqslant 1;$$

здесь $B(a, b)$ есть бета-функция.

С. Х. Сираждинов

4501. Неравенство, связанное с центральной предельной теоремой теории вероятностей. Малхолланд (An inequality related to the central limit theorem on probabilities. Mulholland H. P.), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 3, № 111, 360—369 (англ.)

Будем говорить, что распределение случайной величины X более заострено в 0 (more peaked about 0), чем распределение величины Y, если $P(|X|\leqslant x)\geqslant P(|Y|\leqslant x)$ $(x\geqslant 0)$.

Распределение величины X $(MX=0,\ DX=s^2)$ называется поднормальным, если $M(e^{uX})\leqslant e^{s^2u^2/2}$ $(-\infty<u<\infty)$.

Доказываются теоремы:

Теорема 1. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с одинаковым, симметричным и одновершинным распределением, $Dx_i=s^2$. Для того чтобы распределения сумм $X_n=x_1+\ldots+x_n$ были более заострены в 0, чем нормальные распределения $(0, \sigma_n)$, где $(\sigma_n^2/ns^2)\to 1 (n\to\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы распределение величин x_i было поднормальным. Если это условие выполнено, то в качестве σ_n можно взять любые числа, удовлетворяющие неравенству $\sigma_n^2/ns^2\geqslant 1+n^{-1}\lg 5n$.

Теорема 2. В случае, когда x_i распределены по различным законам, $Dx_i=s_i^2$, но свойства симметричности и одновершинности распределений сохраняются, условие поднормальности распределений является лишь достаточным; при этом за σ_n можно взять любые числа, удовлетворяющие неравенству $(\sigma_n^2/S_n^2)\geqslant c_n^2=1+R_n^{-1}\lg e^2R_n$, где $S_n^2=s_1^2+\ldots+s_n^2$, $R_n=[S_n/\max(s_1, s_2, \ldots, s_n)]^2$. Непосредственным следствием теоремы 2 является неравенство

$$P\left(\frac{X_n}{S_n}\geqslant t\right)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t/c_n}^{\infty}e^{-x^2/2}dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{c_n}{t}e^{-t^2/2c_n^2}\quad(t\geqslant 0).$$

Теорема 3. В условиях теоремы 2 (симметричность, одновершинность и поднормальность компонент x_i) справедливо неравенство

$$P\left(\frac{X_n}{S_n}\geqslant t\right)\leqslant\min\left(\frac{e^{t^2/2}}{2\operatorname{ch}t^2},\ \frac{2(e^{t^2/2}-1)}{9(\operatorname{ch}t^2-1)}\right)\leqslant$$

$$\leqslant e^{-t^2/2},\quad(t\geqslant 0).$$

Это неравенство является усилением известного неравенства С. Н. Бернштейна (Теория вероятностей, ГТТИ, 1934, 155—158). *А. А. Бобров*

4502. Поправки к статье «Замечания о флуктуациях сумм независимых случайных величин». Чжун, Кац (Corrections to the paper «Remarks on fluctuations of sums of independent random variables». Chung K. L., Kac M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 4, 560—563 (англ.). Поправки к статье авторов (Mem. Amer. Math. Soc., 1951, № 6).

4503. Обобщенный интеграл Стилтьеса. Леви (Intégrales de Stieltjes généralisées. Lévy P.), Roczn. Polskiego towarz. mat., (Ann. Soc. polon. math.), 1952, 25, 17—26 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — две действительные функции, непрерывные на отрезке $[0, 1]$. Интегральная сумма, соответствующая разбиению $T_n = \{t_i\}$, $0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n = 1$, определяется как

$$S(T_n) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{2} [f(t_\nu) + f(t_{\nu+1})][g(t_\nu) - g(t_{\nu+1})].$$

Интегралом Стилтьеса в классическом смысле называется предел $\lim S(T_n)$ по всевозможным разбиениям T_n при диаметре $\delta(T_n) = \max(t_{\nu+1} - t_\nu) \to 0$.

Далее вводится понятие обобщенного интеграла Стилтьеса. При этом основная идея автора состоит в том, что разбиение T_n выбирается случайным образом, интегральная сумма $S(T_n)$ рассматривается как случайная величина и интеграл определяется как число, к которому в том или ином смысле сходятся $S(T_n)$. Эта идея была высказана автором в нескольких заметках (Ann. Univ. Lyon, 1941, сер. 3, сек. A, № 4, 67—74; C. r. Acad. Sci., 1941, 212, 1066—1068; 1949, 229, 644—646) и была применена затем к теории броуновского движения (см., например, Proc., second Berkeley Sympos. on math. statist. and probability, University of California Press, 1951, 171—187).

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих равномерное на $[0, 1]$ распределение. Рассматриваются разбиения T_n, порождаемые точками $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, расположенными в порядке возрастания. Стохастическим интегралом $\int_0^1 f dg$ по вероятности (в среднем квадратичном или почти наверное) называется предел $\lim_{n\to\infty} S(T_n)$, если этот предел существует в смысле сходимости по вероятности (соответственно в смысле сходимости в среднем квадратичном или в смысле сходимости почти наверное).

Пусть теперь математическое ожидание $M(S(T_n)) = \mu_n$ и $S(T_n) = \mu_n + \eta_n$. Даются выраженные через f и g условия, достаточные для того, чтобы при $n \to \infty$ $\eta_n \to 0$ в среднем квадратичном. Далее предлагается называть обобщенным стохастическим интегралом $\lim_{n\to\infty} \mu_n$, если этот предел существует (в обычном или некотором обобщенном смысле) как для отрезка $[0,1]$, так и для любого подотрезка.

Далее показывается, что с вероятностью 1

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} S(T_n) = \overline{I} \text{ и } \underline{\lim_{n\to\infty}} S(T_n) = \underline{I},$$

где $\overline{I}$ и $\underline{I}$ — постоянные.

Рассматриваются примеры. Развиваются многомерные обобщения. Кратко описывается приложение к броуновскому движению. В заключение автор указывает три нерешенные проблемы, в том числе: 1) установить, может ли существовать (необобщенный) стохастический интеграл, если кривая $x = f(t)$, $y = g(t)$ на плоскости xy имеет положительную верхнюю меру; 2) установить, каковы те непрерывные и возрастающие функции $t(\tau)$, для которых $\int f(t)\, dg(t) = \int \tilde{f}(\tau)\, d\tilde{g}(\tau)$, где $\tilde{f}(\tau) = f(t(\tau))$, $\tilde{g}(\tau) = g(t(\tau))$. Работа носит обзорный характер. Четкие формулировки утверждений не даются. Доказательства лишь намечены.

Р. Л. Добрушин

4504. Принцип негэнтропии в теории информации. Бриллюэн (The negentropy principle of information. Brillouin L.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, 24, № 9, 1152—1163 (англ.)

Выражение количества информации, даваемой какой-либо операцией, тесно связано с физическим выражением энтропии в статистической термодинамике. Автор считает эту связь важной для теоретической физики и подвергает ее разносторонней физической дискуссии как в общем плане, так и на ряде конкретных примеров. *А. Я. Хинчин*

4505. О статистическом распределении мутаций бактерий. Трикоми (On the statistical distribution of mutant bacteria. Tricomi Francesco G.), Bull. Math. Biophys., 1953, 15, № 3, 277—292 (англ.)

Рассматривается следующая математическая схема. Пусть $\zeta = \gamma_1 + \ldots + \gamma_N$, где γ_i — независимые случайные величины, принимающие значение $0, 1, \ldots, k$, причем

$$P\{\gamma_i = h\} = \lambda_h / N \quad \text{при } h \neq 0$$

и

$$P\{\gamma_i = 0\} = 1 - \left(\sum_{h=1}^{k} \lambda_h\right) \Big/ N.$$

При N большом можно с достаточной степенью точности считать, что $\zeta = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_k$, где случайные величины δ_h независимы и δ_h имеет распределение Пуассона с шагом h и параметром λ_h.

Основная часть работы посвящена изучению распределения вероятностей величины ζ при помощи разнообразных методов математического анализа. Находятся рекуррентные формулы для вероятностей $p_n = P\{\zeta = n\}$ и моментов величины ζ при помощи производящей функции величины ζ. Устанавливаются приближенные формулы для p_n при $n \gg k$.

Подробно изучается частный случай, связанный с мутациями бактерий ($\lambda_h = \lambda / h$ при $h = 1, 2, 4, \ldots, 2^{m-1}$ и $\lambda_h = 0$ при других h). В этом случае вероятности p_n выражаются через функцию

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1} \frac{z^n}{n!}.$$

Приводятся 5-значные таблицы значений функций $G(z)$, $dG(z)/dz$ и $\int_0^z G(t)\, dt$ при $|z| \leqslant 2$ с ша-

гом 0, 1 и аппроксимирующие выражения для $G(z)$ при больших z. Строятся графики распределений.
Р. Л. Добрушин

4506 К. Основы теории вероятностей (Учеб. пособие). **Андреев И. П.** Под ред. проф. А. А. Глаголева, 88 стр., М., 1953

4507 К. Теория вероятностей. Унковский В. А., 320 стр., Воен.-мор. изд-во, М., 1953

4508 К. Современная математика. 14. Теория вероятностей. Ито (現代數學◦確率論. 伊藤清, 406 стр., Иванами, 1953, 650 иен), 科學 (Кагаку), 1953, 23, № 9, 486 (библ.)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

4509. К вопросу о выборках из конечных совокупностей. Эйдельнант М. И., Тр. Ин-та матем. и механики АН УзССР, 1953, 10, № 1, 141—147

Вычисляются несмещенные оценки для среднего и дисперсии по выборкам из конечной совокупности. В качестве оценки для среднего берется среднее арифметическое. Несмещенная оценка для дисперсии σ^2 конечной совокупности имеет вид $k\cdot\overline{\sigma^2}$, где $\overline{\sigma^2}$ — эмпирическая дисперсия, а коэффициент k подобран так, чтобы $M(k\overline{\sigma^2})=\sigma^2$. Рассматривается случай, когда данная конечная совокупность разбита на N_1 одинаковых классов, каждый класс содержит N_2 групп, а каждая группа — N_3 элементов. Из n_1 классов выбирают n_2 групп, в каждой из которых берут по n_3 элементов. Все выборки предполагаются случайными. Выводятся соответствующие этому случаю несмещенные оценки для среднего и дисперсии и вычисляются дисперсии этих оценок.
Л. Н. Большев

4510. Современные достижения в теории выборочного метода с переменными вероятностями. Сен (Recent advances in sampling with varying probabilities. Sen A. R.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1953, 5, № 17, 1—15 (англ.)

4511. Таблицы перемешанных четырехзначных чисел. Штейнхаус (Tablice liczb przetasowanych czterocyfrowych. Steinhaus Hugo), Rozpr. mat., 1953, 6, 1—45 (польск.)

Существующие до сего времени таблицы случайных чисел получаются из источников, которые считаются случайными. Автор построил таблицы перемешанных чисел, используя систематическое перемешивание натуральных чисел.

Таблицы содержат все четверки цифр от 0000 до 9999, причем каждая из них встречается в точности один раз. Отправным пунктом при построении этих таблиц служила последовательность четырех последних цифр чисел вида $4567n$ ($n=1,2,\ldots$). Полученные таким путем перестановки всех четырехзначных чисел перемешаны еще несколько раз так, что установление зависимости между соседними четырехзначными числами становится практически невозможным.

Таблицы перемешанных чисел допускают два различных способа чтения: горизонтальный и вертикальный. Чтение по горизонтали соответствует схеме выбора без возвращения, а чтение по вертикали — схеме выбора с возвращением, а поэтому при вертикальном чтении таблицы перемешанных чисел обладают свойствами таблиц случайных чисел. Замысел автора является существенным вкладом в теорию и практику случайного выбора.

Дается описание метода построения таблиц и способа их употребления на польском, русском и английском языках.
M. Fisz

4512. Третий момент средней разности Джини. Камат (The third moment of Gini's mean difference. Kamat A. R.), Biometrika, 1953, 40, ч. 3—4, 451—452 (англ.)

Средняя разность Джини определяется посредством равенства

$$g=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}|x_i-x_j|,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — выборка из совокупности с каким-либо распределением. Ранее была вычислена дисперсия g (Nair U. S., Biometrika, 1936, 28, 428).

Автор вычисляет первые три момента g в случае, когда выборка произведена из совокупности с нормальным распределением (μ, σ):

$$\mu_1=1{,}128379\,\sigma,$$

$$\mu_2=\frac{\sigma^2}{n(n-1)}(0{,}651006\,n+0{,}151508),$$

$$\mu_3=\frac{\sigma^3}{n^2(n-1)^2}(0{,}393063n^2+0{,}399735n+0{,}094822).$$

Высказывается предположение, что g имеет распределение, близкое к χ-распределению.
С. Х. Туманян

4513. О вычислении математического ожидания. Лах (Contribution to the calculus of the mathematical expectation. Lah Ivo), Sankhyá, 1953, 12, № 3, 247—264 (англ.)

Результаты автора, частично новые, частично уже известные, состоят в вычислении математического ожидания для ряда эмпирических характеристик.

Сначала выводится формула для математического ожидания целой положительной степени частоты $m/n=p'$ события в n независимых испытаниях с постоянной вероятностью p этого события в каждом испытании, а именно:

$$E(p'^a)=\sum_m\sum_r K_{a,m,r}\,n^{-m}\,p^r,$$

где коэффициенты $K_{a,m,r}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$K_{a+1,m,r}=K_{a,m,r-1}+rK_{a,m-1,r}-(r-1)K_{a,m-1,r-1}$$

(a — целое положительное число).

Выводится формула для $E(p'^a)$ и в случае, когда a — любое действительное число. В качестве примеров выписываются $E(1/p')$ и $E(\sqrt{p'(1-p')})$ с точностью до членов порядка $1/n^4$.

Вычисляются математическое ожидание эмпирического коэффициента корреляции с точностью до членов порядка $1/n^4$, а также математические ожидания эмпирических коэффициентов регрессии и средней квадратической связанности с точностью до членов порядка $1/n^3$ или $1/n^4$. *С. Х. Туманян*

4514. Распределение частного коэффициента корреляции в выборках из многомерных совокупностей, когда случайные величины имеют распределения, отличные от нормального. К в е н с е л ь (The distribution of the partial correlation coefficient in samples from multivariate universes in a special case of non-normally distributed random variables. Q u e n s e l C a r l - E r i k), Skand. aktuarietidskr., 1953, № 1—2, 16—23 (англ.)

Пусть даны случайные величины x_k $(k = \overline{1, r})$, распределения которых отличны от нормального, и случайные величины $x_i = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}x_k + y_i$ $(i = \overline{r+1, p})$, где y_i — нормальные случайные величины, некоррелированные с величинами x_k. Доказывается, что выборочное распределение частного коэффициента корреляции типа $\rho_{ij:1,2,\ldots,r}$ $(i, j = \overline{r+1, p})$ не зависит от закона распределения величин x_k и потому таково, как если бы все случайные величины x_m $(m = \overline{1, p})$ были нормальными (в этом последнем случае выборочное распределение $\rho_{ij:1,2,\ldots,r}$ известно). *А. С. Монин*

4515. Об анализе дисперсии частостей. О т т е с т а д (On the analysis of variance of percentage fractions. O t t e s t a d P e r), Skand. aktuarietidskr., 1952, **35**, 152—159 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Пусть $p_{ij} = m_{ij}, n_{ij}$ — частость или процент j-го члена i-го класса, полученная при классификации счетных данных. Автор разбирает четыре различные математические модели, которые могут быть применены, когда изменение p_{ij} содержит компоненты, отличные от биномиальных, и указывает, что они могут дать для анализа дисперсии p_{ij}. В частности, если уровни n_{ij} изменяются от класса к классу, он рекомендует использовать регрессию $a + bw_i$ величины $S_i^2(p)$ — среднего квадрата в i-м классе — на $w_i = \sum_j 1/n_{ij}$. Вес W_i, который должен быть придан p_{ij} в анализе дисперсии, вычисляется из уравнения $1/W_i = a + bw_i$. Указано распространение на двойную классификацию. Идея остроумна, но могла бы быть пояснена дальнейшим сравнением с методами, данными ранее в литературе для определения весов.

W. G. Cochran

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 890.

4516. О некоторых процедурах для исключения подозрительных данных. К и н г (On some procedures for the rejection of suspected data. K i n g E. P.), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, **48**, № 263, 531—533 (англ.)

Пусть $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ — элементы выборки из нормально распределенной совокупности, упорядоченные в порядке возрастания. Рассматриваются две употребительные для исключения крайних наблюдений статистики

$$u_n = \frac{x_n - \bar{x}}{\sigma} \quad \left(\text{или } u_1 = \frac{\bar{x} - x_1}{\sigma}\right)$$

(где $\bar{x}$ — выборочное среднее, σ^2 — дисперсия исходной совокупности) и

$$r_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1} \left(\text{или } r_1 = \frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1}\right)$$

и полагается $u = \max(u_1, u_n)$; $r = \max(r_1, r_n)$: При $n = 3, 4$ распределение u было изучено автором (Ann. Math. Statist., 1952, **23**, 384—395). Для достаточно больших n, когда u_1 и u_n можно считать независимыми, при

$$P(u_n > t_\alpha) = \alpha$$

имеет место приближенное равенство

$$P(u > t_\alpha) = \alpha(2 - \alpha).$$

Последняя величина при обычно принимаемых уровнях значимости α равна приближенно 2α (влияние погрешности, происходящей от предположения независимости u_1 и u_n, в работе не исследуется).

Если

$$P(r_n > z_\alpha) = \alpha,$$

то, как нетрудно видеть,

$$P(r > z_\alpha) \leqslant 2\alpha,$$

причем в последнем соотношении при $\frac{1}{2} \leqslant z_\alpha \leqslant 1$ имеет место равенство, а при $0 \leqslant z_\alpha < \frac{1}{2}$ — строгое неравенство.

Выводы автора приложимы к задаче исключения одного крайнего наблюдения в тех случаях, когда заранее неизвестно, какое именно из двух крайних наблюдений является подозрительным. Изложенные результаты показывают, что в применении к двум упомянутым статистикам эффект, происходящий от перехода к подобной «двусторонней» задаче, выражается в удвоении уровня значимости соответствующего «одностороннего» критерия.

Аналогичный результат для статистики Н. В. Смирнова

$$\frac{x_n - \bar{x}}{s} \left(\text{или } \frac{\bar{x} - x_1}{s}\right)$$

(где s — выборочное среднее квадратическое отклонение) был получен ранее А. М. Бендерским (Докл. АН СССР, 1952, 85, 5—8). *А. А. Петров*

4517. Функция мощности некоторых критериев, основанных на размахе. Д е й в и д (The power function of some tests based on range. D a v i d H. A.), Biometrika, 1953, **40**, ч. 3—4, 347—353 (англ.)

Приводятся результаты вычисления мощности критериев, использующих размах выборки при анализе простой и двойной классификации. Таблицы построены по принципу сравнения с мощностью обычно применяемых в дисперсионном анализе методов. *И. И. Гихман*

4518. Практическое применение оценки максимума двусторонних уклонений эмпирической кривой распределения в заданном интервале роста теоретического закона. Мания Г. М., Сообщ. АН ГрузССР, 1953, **14**, № 9, 521—524

Пусть $S_n(x)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по n независимым наблюдениям случайной величины с непрерывной функцией распределения $F(x)$. Автором было найдено (Докл. АН СССР, 1949, **69**, № 4, 495—497) предельное распределение $\Phi(\theta_1, \theta_2; \lambda)$ (при $n \to \infty$) верхней грани величины $\sqrt{n}\,|S_n(x) - F(x)|$, где x пробегает отрезок, на котором $\theta_1 \leqslant F(x) \leqslant \theta_2$. В реферируемой заметке приводится таблица функции $\Phi(\theta, 1-\theta; \lambda)$ для значений λ от 1 до 2 и для значений θ от 0,1 до 0,5 в обоих случаях через 0,05 (кроме значения $\lambda = 1{,}05$). Автор рекомендует пользоваться предельным распределением при $n \geqslant 100$, но обоснование этой рекомендации не приведено. *И. И. Гихман*

4519. 99,9 и 0,1% точки распределения χ^2. Льюис (99,9 and 0,1% points of the χ^2 distribution. Lewis T.), Biometrika, 1953, **40**, ч. 3—4, 421—426 (англ.)

Указывается способ вычисления и приводятся таблицы для нижних 0,1% точек распределения χ^2 со степенями свободы $n = 1, 2, 3, \ldots, 29, 30, 40, 50, \ldots, 100, 120$, а также для верхних 0,1% точек того же распределения со степенями свободы $n = 40, 50, \ldots, 100, 120$ с точностью до восьмого десятичного знака. *С. Х. Туманян*

4520. Критические значения логарифмически-нормального распределения. Мошман (Critical values of the log-normal distribution. Moshman Jack), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, **48**, № 263, 600—609 (англ.)

Пусть случайная величина x распределена по логарифмически-нормальному закону со средним значением μ и дисперсией σ^2, а

$$\tau = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

— соответствующая нормированная величина. В работе дана таблица значений величины τ_β, определяемой соотношением

$$P(\tau > \tau_\beta) = \beta,$$

для вероятностей β, равных 0,5; 1; 2,5; 5; 10; 90; 95; 97,5; 99 и 99,5%, при различных значениях коэффициента асимметрии величины x. *А. А. Петров*

4521. Иерархические делимые на группы неполные блоки с m ассоциированными классами. Рой (Hierarchical group divisible incomplete block designs with m-associate classes. Roy Purnendu Mohon), Sci. and Culture, 1953, **19**, № 4, 210—211 (англ.)

Наир и Рао исследовали неполные блоки с v вариантами опыта, которые могут быть разбиты на две или более общие группы по определенным признакам. Бозе ввел понятие о классе делимых на группы неполных блоков, которые, составляя подкласс неполных блоков Наира и Рао, представляют также частично уравновешенные неполные блоки с двумя ассоциированными классами. Цель работы автора — ввести понятие о классе неполных блоков, обобщающее понятие о блоках Бозе, определенных выше, с более чем двумя ассоциированными классами. Такие блоки автор называет иерархическими делимыми на группы неполными блоками. Даются схемы таких блоков. *В. И. Романовский*

4522. Циклические решения симметрических, делимых на группы, планов. Шрикханде (Cyclic solutions of symmetrical group divisible designs. Shrikhande S. S.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1953, **5**, № 17, 37—39 (англ.)

4523. Таблица для быстрого определения тетрахорического коэффициента корреляции. Давыдов, Гоин (A table for the rapid determination of the tetrachoric correlation coefficient. Davidoff Melvin D., Goheen Howard W.), Psychometrika, 1953, **18**, № 2, 115—121 (англ.)

Предлагается способ приближенного определения тетрахорического коэффициента корреляции Пирсона для признаков, недоступных для точного числового измерения, по данным четырехклеточной таблицы. Приводится сравнение различных приемов расчета. *Н. В. Смирнов*

4524. Исправление одного доказательства. Кифер (Correction of a proof. Kiefer J.), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 4, 680 (англ.)

Исправление доказательства теоремы 3 в статье автора «О теоремах полноты классов Вальда» (РЖМат, 1954, 1748).

4525 Д. Оценки наибольшего правдоподобия и доверительные множества для неизвестных параметров стационарного гауссовского процесса марковского типа. Лувсанцерен Ш. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1954

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

4526. Введение в теорию информации. Шефль (Úvod do theorie přenosu informací. Šefl Otakar), Slaboproudý obzor, 1953, **14**, № 7—8, 334—337 (чеш.; резюме русск., нем., англ., франц.)

Объяснение основных понятий теории информации: количество информации в сообщении, энтропия, емкость канала, отношение количества информации к ширине полосы пропускания.

4527. О пропускной способности дискретного канала. 1. Математическое выражение пропускной способности канала с одним состоянием, подверженного шумовым искажениям в каждом своем символе. Мурога (On the capacity of a discrete channel. 1. Mathematical expression of capacity

of a channel which is disturbed by noise in its every one symbol and expressible in one state diagram. Muroga Saburo), J. Phys. Soc. Japan, 1953, 8, № 4, 484—494 (англ.)

Пусть P_i означает вероятность появления символа i в выпуске дискретного источника и p_{ij}—вероятность получения на выходе канала символа j, если на входе поступил символ i. Пропускная способность канала определяется согласно Шеннону как верхняя грань выражения

$$-\sum_{i,j} P_i p_{ij} \log \sum_i P_i p_{ij} + \sum_{i,j} P_i p_{ij} \log p_{ij} \quad (1)$$

по всевозможным распределениям P_i, причем относительно метода решения этой экстремальной задачи Шеннон дает лишь указания общего характера. Настоящая статья посвящена конкретному решению этой задачи с детальным разбором всех могущих представиться случаев. Для случая, когда матрица p_{ij} (однозначно определяющая собою пропускную способность канала) имеет обратную матрицу, дается явное выражение как пропускной способности канала, так и распределения P_i, дающего максимум величины (1). Однако во всех деталях рассматривается и случай отсутствия обратной матрицы. Исследуется зависимость результатов от ранга матрицы p_{ij}.

Автор особо отмечает необходимость ограничивать решение экстремальной задачи для величины (1) областью $P_i \geqslant 0$ (метод Шеннона этого не делает) и показывает на конкретном примере, что пренебрежение этим требованием может привести к заведомо неверным выводам. В заключение рассматривается несколько числовых примеров и дается геометрическая иллюстрация пропускной способности канала. *А. Я. Хинчин*

4528. Экстраполяция и предвидение. Дитль (Extrapolace a předvídání. Ditl Augustin), Slaboproudý obzor, 1953, **14**, № 11, 488—491 (чеш.; резюме русск., нем., англ., франц.)

4529. Обнаружение синусоидального сигнала при наличии шумов. Рейк, Суэрлинг (The detection of a sine wave in gaussian noise. Reich Edgar, Swerling Peter), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 3, 289—296 (англ.)

Рассматривается функция времени $z(t)$, относительно которой известно, что она является либо гауссовским стационарным случайным процессом $N(t)$ с нулевым средним значением и заданной корреляционной функцией $\varphi(\tau) = MN(t)\,N(t+\tau)$, либо суммой $N(t) + S(t)$, где $S(t) = A\sin(\omega t + \theta)$, A и ω — известные постоянные, а θ — равнораспределенная по окружности случайная величина. Требуется указать правила, позволяющие по наблюденным значениям $z(t)$ на интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ отдать предпочтение одной из двух гипотез относительно этой функции.

Задача решается в соответствии с обычным в математической статистике методом проверки гипотез Неймана — Пирсона: критическая область в пространстве реализаций $z(t)$ определяется из условия, чтобы для нее вероятность P_F ошибки первого рода (заключающейся в ложном «обнаружении» сигнала $S(t)$) была равна фиксированному значению P_{F*}, а вероятность $1 - P_R$ ошибки второго рода (пропуска имеющегося в действительности сигнала) была наименьшей. Вместо непрерывного множества случайных величин $z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, сначала рассматривается конечное число их: $z_k = z(t_k)$, где $t_k = kT/n$, $k = 1, 2, \ldots, n$; затем производится предельный переход $n \to \infty$. То обстоятельство, что случайные величины z_k зависимы, разумеется, не препятствует обычному для метода Неймана — Пирсона определению критической области при помощи отношения правдоподобия.

Плотности распределения вероятностей для n случайных величин z_k при отсутствии и при наличии в составе $z(t)$ сигнала $S(t)$ обозначаются через $L_0(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ и соответственно $L_1(u_1, u_2, \ldots, u_n)$; тогда

$$L_0(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (2\pi)^{-n/2}\,|\varphi|^{-1/2} \times \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_1^n \xi_{ij} u_i u_j\right\},$$

где

$$|\varphi| = \mathrm{Det}\,\|\varphi_{ij}\|, \quad \varphi_{ij} = \varphi(t_i - t_j), \quad \|\xi_{ij}\| = \|\varphi_{ij}\|^{-1}$$

и

$$L_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_1(u_1\ u_2, \ldots, u_n \mid \theta)\,d\theta,$$

где

$$L_1(u_1, \ldots, u_n \mid \theta) = (2\pi)^{-n/2}\,|\varphi|^{-1/2} \times \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum \xi_{ij}\,[u_i - A\sin(\omega t_i + \theta)] \times \times [u_j - A\sin(\omega t_j + \theta)]\right\}.$$

Отсюда немедленно получается явная формула для отношения правдоподобия

$$\Lambda_n = L_1(z_1, z_2, \ldots, z_n)\,/\,L_0(z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

В этой формуле можно перейти к пределу $n \to \infty$; авторы замечают, что существование конечного предела $\Lambda = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n$ гарантирует невозможность для соответствующей $\varphi(\tau)$ безошибочного (абсолютно точного) обнаружения сигнала. Далее критическая область определяется как область, для которой $\Lambda > \mu$, где постоянная μ находится из условия $P_F = P_{F*}$. Для определения μ требуется вычислить плотность $Q_0(\lambda)$ распределения вероятностей величины Λ при отсутствии сигнала; для нахождения P_R требуется еще определить и плотность $Q_1(\lambda)$ той же величины при наличии сигнала.

Вычисление предела Λ (зависящего от $z(t)$) в работе доводится до конца только для простейшего случая марковского процесса $N(t)$, т. е. для $\varphi(\tau) = \beta e^{-\alpha|\tau|}$. Особенно простой вид полученные формулы приобретают в случае $\alpha \gg 1/T$ (случай «белого шума»); при этом и формулы для $Q_0(\lambda)$ и $Q_1(\lambda)$ также оказываются совсем простыми. Единственной статистикой, от которой зависит решение задачи, в случае «белого шума» оказы-

вается величина $\left|\int_0^T z(t)\,e^{-i\omega t}dt\right|^2$; для произвольного стационарного марковского $N(t)$ решение зависит от $\int_0^T z(t)\,e^{-i\omega t}dt$, $z(0)$ и $z(T)$.

В отношении четкости постановки задачи и строгости выводов изложение работы не вызывает возражений. *А. М. Яглом*

4530. Измерения спектра на выходе детектора при помощи корреляционного метода. Вейнберг, Крафт (Measurements of detector output spectra by correlation methods. Weinberg Louis, Kraft L. G.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 9, 1157—1166 (англ.)

Экспериментальная работа. «Белый шум» (с практически постоянным спектром) пропускался через простой линейный RLC-фильтр, затем усиливался при помощи усилителя и подавался на вход нелинейного элемента — линейного или квадратичного детектора, т. е. детектора, ток I на выходе которого связан с напряжением V на входе соотношением

$$I(V)=\begin{cases}\alpha V & \text{при } V\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } V<0,\end{cases}$$

или соответственно

$$I(V)=\begin{cases}\alpha V^2 & \text{при } V\geqslant 0,\\ 0 & \text{при } V<0;\end{cases}$$

специальное устройство позволяло одновременно подавать на вход детектора чисто синусоидальное напряжение. При помощи специальных корреляторов двух типов измерялись корреляционные функции на входе и на выходе детектора при включенном и выключенном синусоидальном напряжении; по корреляционным функциям определялись соответствующие спектральные плотности. Полученные таким образом корреляционные функции и спектральные плотности сравнивались с теоретически вычисленными (см., например, Райс С., статья в сборнике «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех», Изд-во иностр. лит-ры, М., 1953; Middleton D., Quart. Appl. Math., 1948, 5, 445—498); совпадение теории с экспериментом оказалось очень хорошим. Указывается, что полученные результаты являются хорошей проверкой применяемой аппаратуры (в частности, корреляторов) и дают основание для дальнейшего использования экспериментов такого рода при решении задач, не поддающихся непосредственному расчету. *А. М. Яглом*

4531. Минимальные стоки, рассматриваемые как крайние члены. Гумбель (Les débits minima interprétés comme valeurs extrêmes. Gumbel Émile J.), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 10, 512—514 (франц.)

Для интерпретации статистических данных о минимальных суточных стоках в течение года по ряду рек автор пытается применить теорию предельных законов крайних членов вариационного ряда, разработанную Мизесом и Б. В. Гнеденко. Наиболее естественным, по мнению автора, является применение закона распределения, при котором вероятность минимального стока, большего z ($z\geqslant\varepsilon$), будет

$$P(z)=\exp\left[-\left(\frac{z-\varepsilon}{\nu-\varepsilon}\right)^{\alpha}\right],$$

$$\varepsilon\geqslant 0,\ \nu>0,\ \alpha>0 \text{ — параметры.}$$

Для параметра ε, характеризующего сток в засушливые годы, указывается способ статистической оценки. Проверка по 20 рекам, по которым имеется ряд тридцатилетних наблюдений, показывает, по мнению автора, хорошее согласие с теорией. *Н. В. Смирнов*

4532. Статистический контроль производственных процессов с учетом времени. Камалов М. К. Тр. ин-та матем. и механики АН УзССР, 1953, № 11, 74—87

Приводится схема контроля за износом инструмента при помощи нарастающей средней арифметической. Работа ошибочна. Расчеты, приведенные на стр. 81, предполагают, что распределения нарастающих средних

$$\bar{x}_{n_1}=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}x_i}{n_1} \text{ и } \bar{x}_{n_2}=\frac{\sum_{i=1}^{n_2}x_i}{n_2}\quad (n_1<n_2)$$

независимы, а это неверно. *Б. А. Севастьянов*

4533 К. Статистика для технологов. Парадин, Риветт (Statistics for technologists. Paradine Charles George, Rivett Berwyn Hugh Patrick, VII + 288 pp., tabl., 50 diagrs, English U. P., London, 1953, 25 s.), Brit. Nat. Bibliogr., 1953, **199**, 9 (библ.)

См. также: 4296, 4349, 4425, 4487, 4491, 4603 К, 4658

ГЕОМЕТРИЯ

4534. Способ трисекции угла по Я. Бойаи. Секефальви-Надь (Bolyai János szögharmadolása. Szökefalvi-Nagy Gyula), Mat. lapok, 1953, 4, № 2—3, 84—86 (венг.; резюме русск., нем.)

4535. Замечания об умножении векторов и кватернионов. Ацел (Bemerkungen über die Multiplikation von Vektoren und Quaternionen. Aczél J.), Acta math. Acad. sci. hung., 1952, **3**, № 4, 309—316 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.; резюме русск.)

Рассматривается билинейная функция двух векторов трехмерного евклидова пространства, которая относит этим векторам скаляр или вектор. Требуя в первом случае, чтобы значение скаляра было инвариантным при совместном

вращении обоих векторных аргументов, а во втором случае, чтобы третий вектор подвергался тому же вращению, как и аргументы, автор показывает, что значение функции может отличаться только постоянным множителем от скалярного или векторного произведения векторных аргументов.

Рассматривая кватернион как совокупность вектора и скаляра, автор требует, чтобы произведение двух кватернионов было линейной функцией сомножителей, а также удовлетворяло ассоциативному закону и подчинялось указанным выше требованиям при вращении векторных частей сомножителей. Оказывается, что этими требованиями характеризуется обычное умножение кватернионов. *А. П. Норден*

4536. «Элементы» Карла Эдуарда Филиппа, ученика Джироламо Саккери. Брусотти (Gli «Elementa» di Carlo Edoardo Filippa, allievo di Girolamo Saccheri. Brusotti Luigi), Atti Accad. Ligure, 1952, **9**, 155—164 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Перевод из Math., Rev., 1953, **14**, № 11, 1050.

4537. Новое обоснование гиперболической тригонометрии при помощи орисферы. Сас (Neue Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie durch Verwendung der Grenzkugel. Szász Paul), Acta math. Acad. sci. hung, 1953, **3**, № 4, 327—333 (нем.)

Автор, используя работу В. Ф. Кагана, снова доказывает, что произведение дуги $p(a)$ высоты орицикла на тангенс угла параллельности $\Pi(a)$

$$p(a)\operatorname{tg}\Pi(a) = k$$

является постоянной дуги орицикла (от a не зависит). *С. И. Зетель*

4538 К. Равносторонние треугольники, вписанные в данное коническое сечение. Бомстра (Triangles équilatères inscrits dans une conique donnée. Boomstra W., Anniversary Volume on applied mechanics dedicated to C. B. Biezeno, 24—37 pp., N. V. De Technische Uitgeverij H. Stam., Haarlem, 1953) (франц.)

Задача отыскания всех равносторонних треугольников, вписанных в данное коническое сечение K, решается следующим образом: геометрическое место центров p кругов C_p, описанных около этих треугольников, является тоже коническим сечением. Для каждого p дается явной формулой точка q из $C_p \cap K$, отличная от вершин треугольника, тем подсчитывается вершина треугольника, ближайшая к точке q. Исследуется вопрос о возможности построения этих треугольников при помощи циркуля и линейки. *H. Busemann*

Перевод из Math. Rev., 1954, **15**, № 1, 55.

4539 К. Методология. Геометрические понятия. Детуш (Méthodologie. Notions géométriques. Destouches Jean-Louis., Traité de physique théorique et de physique mathématique, tome I, XIV + 228 pp., Gauthier-Villars, Paris, 1953, 3000 fr.) (франц.)

Эта книга является первым томом предполагаемой серии монографий по основаниям физики и состоит из двух частей.

Первая часть (стр. 1—69) содержит исследования различных условий, которые, по мнению автора, должны иметь место при удовлетворительной формализации отрасли физики. Референт находит формулировки большинства этих условий неясными и не понимает аргументов, которые приведены для доказательства их необходимости. Было бы легче следить за рассуждениями автора, если бы он предпослал несколько специфических примеров аксиоматизации отраслей физики: мы надеемся, что такие примеры будут приведены в следующих томах серии.

Конец книги посвящен изложению различных геометрий (проективной, аффинной и евклидовой) и краткой трактовке некоторых понятий, связанных с массами (в частности, центр масс и эллипсоид инерции); здесь много внимания уделено теоретико-структурным свойствам множества линейных подпространств данного пространства. Поскольку, как автор сам говорит на стр. 71, доказательства опущены и изложение не претендует ни на полноту, ни на строгость,— неясно, почему эти главы не могут быть заменены ссылками на обычные книги по геометрии. Части книги первоначально были прочитаны как лекции в Сорбонне, и различные главы оканчиваются «Упражнениями», некоторые из которых представляются чрезмерно трудными: так, упражнение 1 на стр 69 гласит: «Аксиоматизировать различные физические теории; привести доказательства независимости понятий и постулатов». Казалось бы разумнее предложить этот проект как работу целой жизни, чем как одно из семи «Упражнений». *J. C. C. McKinsey*

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 10, 1042.

4540 К. Аналитическая геометрия. Привалов И. И. Учебник для высш. техн. учеб. заведений, перев. на укр. яз. с 17-го изд., 292 стр., Гостехиздат УССР, Киев, 1953, 8 руб. (библ.)

4541 К. Краткий курс аналитической геометрии. Ефимов Н. В. Учебник для вузов, перев. на лат. яз. З. Плуме, 236 стр., Латгосиздат, Рига, 1953, 5 р. 85 к. (библ.)

4542 К. Сборник задач по высшей математике. Минорский В. П. (Для вузов). Перев. на укр. яз., 183 стр., Гостехиздат УССР, Киев, 1953, 5 р. 55 к. (библ.)

4543 РЕЦ. Введение в свободную геометрию плоских кривых. Элементарная математика с высшей точки зрения. Том I. Лохер-Эрнст (Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven, Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkt aus. Locher-Ernst Louis, 87 S., 169 Abb., Basel, 1952, 12.50 Schw. Fr.) [**Рецензия: Боль** (Bol. G.), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1953, 56, № 2—3, Abt. 2, 54—55 (нем.)]

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

4544. Геометрические пространства в электротехнике. Кучера (Espaces géométriques en électrotechnique. Kučera Jaroslav), Rev. gén. électr., 1953, **62**, № 8, 379—391 (франц.)

Подчеркивая возрастающее значение геометрии в теоретической электротехнике, автор дает обзор обобщенных пространств современной дифференциальной геометрии, используемых в электротехнике. Начиная с обычного аффинного пространства, автор переходит к гиперкомплексным пространствам (псевдоевклидовым), к риманову пространству, спи-

норному пространству, гильбертову пространству. Кроме обзора общих свойств, даются некоторые электротехнические приложения. Встречаются математические неточности. *С. И. Зетель*

4545. Вариационные принципы для движения планет в центральном поле Биркгофа. Граэф-Фернандес (Variational principles for the movement of the planets in a central field of Birkhoff. Graef Fernández Carlos), Rev. mexic. fis., 1953, **2**, 180—192 (исп.)

Пусть (t, x, y, z) — координаты в пространстве — времени Минковского. Положим $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и $v = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$, где точка означает производную по t. Тогда уравнения движения пробной частицы в гравитационном поле с центральной массой будут, согласно теории Биркгофа, таковы:

$$\ddot{x} = M(-x - xv^2 + 2\dot{x}r\dot{r})/r^3 \text{ и т. д.},$$

если единицы выбраны так, чтобы скорость света c и гравитационная постоянная G были равны единице.

Автор показывает, что эти уравнения возникают из вариационного принципа

$$\delta\int L\,dt = 0,\ L = (1/2)me^{2M/r}(1+v^2),$$

где m — масса пробной частицы. В первом приближении эта функция Лагранжа равна соответствующей функции в ньютоновской теории. Аналогично мировые линии таких пробных частиц в 4-мерном пространстве — времени являются экстремалями вариационного принципа. *H. S. Ruse*

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 11, 1135.

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4546. О некоторых многозначных соответствиях в проективной геометрии. Мандзюк А. И., Украинский матем. ж., 1953, **5**, № 4, 439—452

Дается критический обзор работ по проективной геометрии К. А. Андреева, А. К. Власова и А. А. Глаголева, относящихся к многозначным соответствиям, и попутно приводится ряд новых существенных дополнений к этим работам.

Подобно тому как кривая 2-го порядка по пяти ее точкам легко строится при помощи двух прямолинейных пучков, находящихся в проективном соответствии, К. А. Андреев в своей докторской диссертации «О геометрических соответствиях в применении к вопросу о построении кривых линий» (1879 г.) обосновывает построение кривых 3-го, 4-го и высших порядков на взаимно многозначном соответствии между двумя прямолинейными пучками; тем самым К. А. Андреев вопрос о построении кривых свел к геометрическому построению многозначных соответствий общего вида.

А. А. Глаголев впервые обнаружил существенные пробелы в его рассуждениях и пришел к выводу, что предложенные им способы построения кривой 3-го порядка по ее 9 точкам, кривой 4-го порядка по 14 заданным точкам и т. д. недостаточно обоснованы в отношении своей общности. Для синтетического доказательства общности взаимно двузначного соответствия, установленного К. А. Андреевым, необходимо доказать, что это соответствие вполне определяется восемью парами соответствующих элементов; но К. А. Андреев как раз дает непосредственное построение коррелятивного соответствия по восьми парам сопряженных точек; отсюда следует, что независимо от правильности рассуждений К. А. Андреева данное им взаимно двузначное соответствие является взаимно двузначным соответствием общего вида.

Автор, используя одно построение А. А. Глаголева, переводит взаимно трехзначное соответствие, установленное К. А. Андреевым между точками двух конических сечений, в аналогичное соответствие точек двух конических сечений, принадлежащих двум трехмерным пространствам, между которыми установлено коррелятивное соответствие. На основе такой интерпретации показывается, что это соответствие, а, следовательно, и соответствие К. А. Андреева, является общим взаимно трехзначным соответствием. Ссылаясь на аналогичное отображение полученного К. А. Андреевым построения взаимно четырехзначного соответствия в четырехмерном пространстве, автор утверждает возможность доказательства, что это соответствие будет взаимно четырехзначным соответствием общего вида.

Для полярных систем А. К. Власова автор предлагает следующую интерпретацию в многомерном пространстве. Пусть C^n — нормальная кривая n-мерного пространства S_n; из произвольной точки X пространства S_n к C^n можно провести n соприкасающихся гиперплоскостей, которые на C^n определят n точек прикосновения $X_1, X_2, \ldots, X_n$; обратно, в каждой из n произвольных точек $X_1, X_2, \ldots, X_n$ кривой C^n можно построить ее соприкасающуюся плоскость и эти плоскости пересекутся в определенной точке X пространства S_n; точки кривой C^n можно привести во взаимно однозначное соответствие с точками конического сечения C^2; таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками S_n и группами в n точек конического сечения C^2.

Отображая указанным образом все точки произвольной гиперплоскости S_n на C^2, мы получим на кривой C^2 точечное множество, состоящее из ∞^{n-1} групп точек по n точек в каждой группе; это множество и будет полярной системой n-го порядка А. К. Власова (впрочем, последний рассматривает полярные системы лишь до $n=6$ включительно). При помощи данного автором отображения многие свойства полярных систем (относящиеся к неконструктивным вопросам) получаются при использовании свойств нормальной кривой проще и короче, чем они доказаны А. К. Власовым. *С. С. Бюшгенс*

4547. О существовании линий инволюции порядка выше третьего, обладающих линейным комплексом инвариантных прямых. Уайли (The existence of line involutions of order greater than three possessing a linear complex of invariant lines. Wylie C. R., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 5, 807—809 (англ.)

Определяется класс инволюций, порядок которых $m \geqslant 4$ и инвариантные элементы которых

образуют комплекс; автор оперирует в пространстве S_5 с неособым многообразием V_4^2, точки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с прямыми пространства S_3 в силу известного истолкования плюкеровых координат прямой как однородных координат точки в S_5.

Возьмем на V_4^2 точку O и плоскость π и пусть λ будет прямая пересечения π с касательною гиперплоскостью к V_4^2 в точке O; сверх того, пусть C_α — кривая порядка α на V_4^2, пересекающая π в $\alpha-1$ точках, из которых β лежат на λ; очевидно, C_α лежит в некотором S_4 и является рациональной. Наконец, пусть Γ есть пересечение V_4^2 и общего S_4, тогда точки Γ будут представлять в S_3 общий линейный комплекс прямых.

Возьмем произвольную точку P на V_4^2, тогда четырехмерное многообразие $(PO\pi)$ пересекает C_α, кроме выше фиксированных $\alpha-1$ точек, еще в одной добавочной точке Q (Q совпадает с одной из фиксированных точек только в том случае, если $PO\pi$ содержит касательную к C_α в одной из этих точек). Плоскость $\sigma=POQ$ пересекает V_4^2 по коническому сечению γ и это последнее имеет с Γ две общие точки M и N. Точке P соответствует единственная точка P', гармонически сопряженная относительно M и N на γ. Соответствие P и P' инволюционное и его инвариантными элементами являются только точки на Γ.

Ссылаясь на результат своей предыдущей статьи (Math. Mag., 1950, Jan.-Febr., 125—131), автор доказывает, что порядок полученной инволюции равен $m=2\alpha+\beta+2$ ($\beta\leqslant\alpha-1$) и, следовательно, начиная с $\alpha=1$, $\beta=0$, можно получить все значения $m\geqslant 4$. *С. С. Бюшгенс*

4548. Теорема распределительности для точек на прямой. Клелленд (The distributivity theorem for points on a line. Clelland R. C.), Amer. Math. Monthly, 1953, 60, № 8, 547—548 (англ.)

Дается элементарное доказательство закона распределительности (слева и справа) при проективном умножении и сложении точек на прямой. Используется теорема, обратная теореме Дезарга. *А. Г. Школьник*

4549. Об одной геометрической интерпретации комплексных элементов. Сосновский (Sur une interprétation géométrique des éléments complexes. Sosnowski W.), Roczn. Polskiego towarz mat. (Ann. Soc. polon math.), 1953, 24, № 2, 35—48 (франц.)

Штаудт связал эллиптическую инволюцию на прямой с ориентацией этой прямой, чтобы ввести различие точек сопряженной пары. Автор занимается проблемой, не имеется ли кроме инволюций другого класса проективных преобразований, которые служили бы основой для определения комплексных точек, и чтобы при этом преобразование определялось посредством минимального количества точек.

Затем рассматриваются инволюции n-го порядка, т. е. проективные преобразования, n-я итерация которых дает тождественное преобразование, а m-я итерация для $m<n$ не является тождественной. Тройка точек на прямой линии однозначно определяет инволюцию 3-го порядка. Последние не имеют двойных действительных точек.

Для $n>3$ инволяция n-го порядка может служить для определения комплексных точек только в случае, когда существует единственное число $p<n$ такое, что p и n взаимно простые, а следовательно, нужно рассматривать только числа $n=4$ и $n=6$. Для того чтобы четверка точек на прямой определяла инволюцию 4-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы она была гармонической четверкой, а поэтому инволюция четвертого порядка определяется тройкой точек. Случай $n=6$ также рассматривается в конце работы.

Автор приводит также некоторые приложения, например, следующее: дано коническое сечение S и прямая L, не пересекающая S в действительных точках, построить комплексные точки пересечения S и L. *S. Golab*

4550 К. Начертательная геометрия (парал. проекции). Мчедлишвили Е., Вачнадзе Г. Учеб. пособие для втузов на груз. яз., 456 стр. с черт., изд., «Техника да Шрома»., Тбилиси, 1953, 10 р. 50 к. (библ.)

4551 К. Начертательная геометрия. Чалый А. Т. Учебник для втузов УССР на укр. яз., 408 стр., Гостехиздат УССР, Киев, 1953, 9 руб. (библ.)

4552 К. Сборник задач по начертательной геометрии. Рудаев А. К. Учеб пособие для высш. техн. учеб. заведений, пер. на укр. яз. с 8-го изд., 371 стр., Гостехиздат, Киев, 1953, 9 р. 50 к. (библ.)

4553 Д. О геометрии топографических поверхностей. Рыжов Н. Н. Автореф. дисс. канд. техн. н., Моск. авиац. ин-т, М., 1954

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4554. Замечание о поверхности Куммера. Годо (Rémarque sur la surface de Kummer. Godeaux Lucien), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953, 22, № 8—10, 368—373 (франц.)

Показывается, что если в уравнении поверхности 2-го порядка, которая касается четырех граней координатного тетраэдра, заменить текущие координаты их квадратами, то полученная поверхность будет поверхностью Куммера, которую Кэли назвал тетраэдроидом. Она обладает 16 особыми точками (двойными коническими), расположенными по 4 в каждой грани тетраэдра. Конус прямых, проходящих через одну из этих особых точек и касающихся поверхности вне этой точки, распадается на 6 плоскостей, проходящих каждая через 6 двойных точек поверхности и касающихся поверхности вдоль некоторого конического сечения. *В. В. Морозов*

4555. Алгебраические поверхности и уравнения Лапласа. Тольятти (Superficie algebriche ed equazioni di Laplace. Togliatti Eugenio G.), Atti Accad. Ligure, 1952, 9, 136—154 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Обзор известных алгебраических поверхностей, которые представлены уравнением Лапласа, и определение всех таких поверхностей, которые рациональны и могут быть представлены на плоскости линейной системой кривых 3-го порядка.
Резюме автора

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 11, 1117.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

4556. По поводу уравнений Петерсона. Дубнов Я. С., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 1 (59), 101—106

В связи с опубликованием диссертации К. М. Петерсона с комментарием С. Д. Россинского (Историко-математические исследования, 1952, 5, 87—133) автор развивает свои соображения (Тр. Семинара по векторному и тензорному анализу, 1948, 6, 17), показывая эквивалентность уравнений Петерсона уравнениям, получающимся из соответствия Комбескюра между линиями кривизны и их сферическими изображениями.

Дается вариант формулировки основной теоремы теории поверхностей, а также приложения к классической задаче об изгибании поверхности с сохранением линий кривизны, к составлению необходимого и достаточного признака виртуальной сети линий кривизны и к определению поверхности по заданным ее главным кривизнам. *С. Д. Россинский*

4557. О конформных с сохранением окружностей отображениях циклических поверхностей друг на друга и на плоскость. Ленц (Über kreistreue konforme Abbildungen zyklischer Flächen aufeinander und auf die Ebene. Lenz Hanfried), Sitzunsgber. Math.-naturwiss. Kl. Bayer Akad.Wiss., 1952, 55—69 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Статья касается «цилиндрических поверхностей», образованных однопараметрическим семейством окружностей в трехмерном евклидовом пространстве. Автор исследует свойства тех поверхностей этого типа, которые могут быть конформно отображены на плоскость так, что соблюдается одно из следующих свойств: 1) образующие окружности переходят в окружности; 2) сложное отношение (cross-ratio) диаметров образующих окружностей равно таковому же их образов; 3) дуга образующей окружности переходит в дугу окружности. Аналогичный вопрос рассмотрен относительно отображений частей этих поверхностей на тор.
C. B. Allendoerfer

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 901.

4558. Асимптотические сети и гармонические конгруенции. Су Бу-цин (曲面的漸近線網與調和線叢。蘇步青), 數學學報, (Шусюэ сюэбао), 1953, 3, № 3, 167—176 (кит.; резюме англ.)

Основная теорема: Если P_1 и P_2 — две точки на асимптотических касательных в точке P к нелинейчатой невырожденной поверхности (P) и конгруенция (P_1P_2) гармонична к асимптотической сети; если PP_3 — прямая, проведенная из точки P и опирающаяся на вторые касательные (кроме общей касательной P_1P_2) линий фокальной сети соответственно в точках P_1 и P_2, то прямые PP_3 и P_1P_2 сопряжены относительно квадрики Вильчинского к поверхности (P) в точке P. При этом под конгруенцией, гармоничной асимптотической сети, подразумевается конгруенция, развертывающиеся поверхности которой соответствуют асимптотическим линиям поверхности (P), а фокусы лежат в точках пересечения луча с асимптотическими касательными. *С. П. Фиников*

4559. Дифференциальное уравнение аффинной сферы в новом виде. Йонас (Die Differentialgleichung per Affinsphären in einer neuen Gestalt. Jonas Hans), Math. Nachr., 1953, **10**, № 5—6, 331—352 (нем.)

Поверхность называется аффинной сферой, если ее полная кривизна выражается через расстояние от начала координат касательной плоскости так: $K = -c^4w^4$, где $c = \text{const}$ можно привести к единице подбором масштаба измерения K (Tzitzéica G., C. r. Acad. sci., 1910, **150**, 965, 1227; Rend. circ. mat. Palermo, 1908, **25**, 180; 1910, **28**, 241; Jonas H., Ann. mat. pura ed appl., 1921, **30**, 223; Math. Ann. 1924, **92**, 214; Sitzungsber. Berliner math. Ges., 1928, **27**, 57).

Пусть $(\xi) \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ и (ξ') — аффинные сферы, попарно сопряженные относительно мнимой сферы $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$; на них сопряженная сеть и асимптотические линии соответствуют. Вводя параметры $u = \eta / \xi$, $v = \zeta'$, автор вместо уравнения

$$(\log h)_{\alpha\beta} = h - h^{-2} \qquad (1)$$

в параметрах α, β асимптотических линий получает новое дифференциальное уравнение аффинной сферы:

$$(R_u / R^2v^2)_u = (R^2R_v / v^2)_v. \qquad (2)$$

Если известен частный интеграл R уравнения (2), то аффинные сферы (ξ) и (ξ') определяются посредством двух квадратур. Уравнение (2) служит уравнением изгибания для поверхностей с линейным элементом

$$ds^2 = \frac{9}{4}(u du^2 - 2du dv + v dv^2). \qquad (3)$$

По R двумя квадратурами находится двупараметрическое семейство поверхностей (3). При помощи R только квадратурами получаем интегральную поверхность уравнения

$$s^2 - rt = (pq)^{4/3}, \qquad (4)$$

у которой нормальный вектор, нормированный в смысле Лельевра, удовлетворяет условию $\xi\eta\zeta = 1$.

Одно и то же уравнение

$$R^2 du^2 - R^{-2} dv^2 = 0 \qquad (5)$$

определяет асимптотические линии на поверхностях (ξ), (ξ'), (3), (4).

Автор сводит уравнение (4) к уравнению (2) и квадратурам.

При использовании асимптотических параметров автору удалось выразить через производные от R интегрирующий множитель уравнения $R\,du \pm \pm R^{-1}\,dv = 0$ асимптотических линий на аффинной сфере.

Отдельно решается такая же задача для слу-

чая, когда (1) превращается в уравнение Лиувилля $(\log h)_{\alpha\beta} = h$, т. е. для косых (линейчатых) аффинных сфер.

Если $R = U(u)V(v)$, то h, удовлетворяющее уравнению (1), становится функцией от $\alpha + \beta$. При незначительной специализации U, V получаются аффинные сферы вращения. Дифференциальное уравнение 2-го порядка меридиана интегрируется в квадратурах.

Интеграл R уравнения (2) позволяет написать вполне интегрируемую систему трех линейных уравнений в частных производных 2-го порядка, определяющую вектор ξ общего перпендикуляра к лучам g_1 и g_2 расслояемой пары конгруенций (Sitzungsber. Berliner math. Ges, 1915, 14, 96; РЖМат, 1953, 424). Среди расслояющих поверхностей на одном из лучей (g_1, g_2) имеется две аффинные сферы с $K = -c^4w^4$ и $K = -w^4c^{-4}$; все расслояющие поверхности на другом луче — аффинные сферы с $K = -w^4$. Асимптотические линии на расслояющих поверхностях определяются через квадратуры из уравнения (5). *К. Н. Тихоцкий*

4560. Инфинитезимальная классификация поверхностей второго порядка. Тихомирова Е. С., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 1 (59), 121—123

В заметке проводится инфинитезимальная классификация поверхностей 2-го порядка в трехмерном пространстве (две поверхности называются инфинитезимально эквивалентными, если существует в обе стороны равномерно непрерывное преобразование одной поверхности в другую). Для невырожденных поверхностей 2-го порядка эта классификация совпадает с аффинной, для вырожденных — отличается от аффинной.

В заметке имеются следующие описки: вместо cos всюду надо читать sin; на стр. 121, строка 6 снизу, вместо знака $\leqslant$ должен стоять знак $\geqslant$. *В. А. Ефремович, А. С. Шварц*

4561. Гладкие поверхности с обобщенными вторыми производными. Бакельман И. Я., Докл. АН СССР, 1954, 94, № 4, 605—608

Вводятся в рассмотрение поверхности, называемые автором поверхностями ограниченного искривления. Это поверхности, допускающие параметризацию $r = r(u, v)$, где $r(u, v)$ — вектор-функция, имеющая обобщенные вторые производные в смысле С. Л. Соболева с интегрируемым квадратом.

Указывается на возможность равномерного приближения этих поверхностей регулярными поверхностями F_h, $r = r_h(u, v)$, для которых

$$\iint (r_{huu}^2 + r_{huv}^2 + r_{hvv}^2)\, du\, dv$$

равномерно ограничены.

При помощи такого приближения устанавливаются различные теоремы о связи между внутренней кривизной поверхности и площадью ее сферического изображения, об определении поверхности ее первой и второй (обобщенной) формами, об однозначной определенности замкнутых поверхностей с положительной кривизной и др. Теоремы приводятся без доказательства. *А. Д. Александров*

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

4562. Об отображении пространств постоянной кривизны в евклидово пространство. Бомпьяни (Intorno alle rappresentazioni degli spazi a curvatura costante sullo spazio euclideo. Bompiani Enrico), Atti Accad. Ligure, 1952, 9, 99—105 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Отображения Клиппига—Дарбу псевклидового пространства на обычные 3-мерные пространства получены в более геометрической форме. Сначала эллиптическое пространство E_3 трактуется как проективное пространство, в котором абсолют всегда может быть задан в однородных координатах в виде

$$\Omega(x) \equiv x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Для точек не на абсолюте взяты координаты Вейерштрасса, нормированные так, что $\Omega(x) \equiv 1$. Автор истолковывает числа $X = x_1/x_0$, $Y = x_2/x_0$, $Z = x_3/x_0$ как декартовы координаты в евклидовом пространстве S_3, в котором абсолют E_3 превращается в комплексную сферу $x^2 + y^2 + z^2 = -1$, и показывает, как это естественно приводит к соответствию декартовых координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) в S_3 и вейерштрассовых координат $(x_0, x_1, x_2, x_3,)$ в E_3. Точке в E_3 соответствуют две точки в S_3, эти точки взаимно инверсны относительно комплексной сферы $\Omega(x) = 0$. Ту же самую идею автор использует для отображения гиперболического пространства на E_3 и получает некоторые дальнейшие свойства отображений. *E. T. Davies*

Перевод из Math. Rev., 1954, 15, № 1, 61.

4563. B-сферические отображения вещественных минимальных поверхностей в R_4. Пинль (B-Kugelbilder reeller Minimalflächen in R_4. Pinl M.), Math. Z., 1953, 59, № 3, 290—295 (нем.)

Для двумерных поверхностей S_2 евклидова четырехмерного пространства R_4 Бляшке (Blaschke W., Ann. mat. pura ed appl., 1949, сер. 4, 28, 205—209) получил пары сферических отображений (B-отображения).

Для этих отображений дается обобщение теоремы о конформности гауссового сферического отображения минимальных поверхностей на R_4: B-сферические отображения вещественных (не совпадающих с плоскостью) минимальных поверхностей S_2 в R_4 конформны. При доказательстве используется ортонормированный репер и кватернионы. *А. Г. Дорфман*

4564. О вполне геодезических гиперповерхностях в римановом пространстве. Ножичка (O nadplochách totálně geodetických v Riemannově prostoru, I. Nožička František), Časop. pěstov. mat., 1953, 78, № 1, 65—72 (чеш.)

Рассматриваются n-мерные римановы пространства V_n класса I (погрузимые в $(n+1)$-мерное евклидово пространство). В предположении, что все рассматриваемые функции имеют непрерывные частные производные нужного порядка, а ранг второго метрического тензора $h_{\alpha\beta}$ пространства V_n равен n, доказывается, что необходимое и достаточное условие того, что гиперповерхность

V_{n-1} пространства V_n с уравнениями $x^\alpha = x^\alpha(\eta^a)$ ($\alpha=1, 2, \ldots, n$; $a=1, 2, \ldots, n-1$) является вполне геодезической, имеет вид $\nabla_a n^\alpha = 0$, где n^α—нормальный вектор гиперповерхности V_{n-1}, а ∇_a— оператор ковариантного дифференцирования по координатам η^a гиперповерхности, и что вектор n^α направлен по главному направлению тензора $h_{\alpha\beta}$. *Б. А. Розенфельд*

4565. О преобразовании сферически симметрических метрик. Кустаанхеймо (A note on the transformability of spherically symmetric metrics. Kustaanheimo Paul), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1953, сер. 2, 9, 13—16 (англ.)

Показывается, что всякую сферически симметрическую метрику, т. е. метрику, характеризующуюся линейным элементом

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - e^\lambda dr^2, \qquad (1)$$

где ν, λ — некоторые функции от переменных r и t, всегда можно привести к изотропному виду. Рассматриваемая метрика считается приведенной к изотропному виду, если существуют функции

$$\bar{r} = \bar{r}(r, t), \quad \bar{t} = t(r, t),$$

позволяющие записать линейный элемент (1) в переменных $\bar{r}$, $\bar{t}$, θ, φ в форме

$$ds^2 = -e^{\bar{\mu}}(d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2\theta d\varphi^2) + e^{\bar{\tau}} d\bar{t}^2,$$

причем $\bar{\mu} = \bar{\mu}(\bar{r}, \bar{t})$, $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\bar{r}, \bar{t})$. *И. П. Егоров*

4566. О геометрических объектах класса нуль, допускающих алгебру. Пидек (Sur les objets géométriques de la classe zéro qui admettent une algèbre. Pidek Halina), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1953, 24, № 2, 111—128 (франц.)

В одномерном пространстве рассмотрим геометрические объекты класса нуль (т. е. такие, в правила преобразования которых входят только координаты и не входят производные этих координат) с одной компонентой. Множество таких объектов обозначим через K. Возникает проблема, когда $f(x_1, \ldots, x_n)$ будет тоже принадлежать K, если x_i принадлежат K и служат объектами с тем же самым правилом преобразования.

В настоящей работе эта задача решается в случаях $n=1$ и $n=2$. Для $n=2$ существуют объекты, для которых никакая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ не представляет объекта. В противном случае будем говорить, что объекты x_1, x_2 допускают алгебру.

Главный результат работы содержится в предложении 3.1, которое при некоторых условиях регулярности для функции f определяет: 1) подкласс объектов множества K, которые допускают алгебру, 2) все функции f, являющиеся объектами класса K, т. е. в этой теореме говорится, какие действия и на каких объектах класса K можно выполнять.

Автор получает два «типа» упомянутых объектов, допускающих алгебру.

Доказательство основной теоремы разбито на ряд лемм и опирается на сведение функциональных уравнений к соответствующим дифференциальным уравнениям. Отсюда вытекает упомянутое выше условие, относящееся к регулярности искомых функций f. Возможно, что при другом методе это условие удалось бы ослабить.

Случай произвольного n должен явиться предметом дальнейшей публикации. *S. Gołab*

4567. Теория единого поля с $\Gamma_\mu \neq 0$. Бозе (Une théorie du champ unitaire avec $\Gamma_\mu \neq 0$. Bose S. N.), J. phys. et radium, 1953, 14, № 12, 641—644 (франц.)

Если в теории Эйнштейна, согласно предпоследнему изданию его книги (Einstein A., The Meaning of Relativity, 3 ed., 1950), уравнения единой теории поля выводятся путем варьирования интеграла от

$$I = g'^{\mu\nu} E_{\mu\nu}$$

при дополнительном условии $\Gamma_\mu = 0$, где

$$\Gamma_\mu = \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\lambda\mu}, \quad g'^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\sqrt{|g|},$$

$$E_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\varepsilon_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\varepsilon\lambda} - \Gamma^\varepsilon_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\varepsilon\nu},$$

то в настоящей работе обобщенные уравнения поля получены без каких-либо ограничительных связей, только путем варьирования интеграла от следующего выражения:

$$I' = \frac{1}{2}(g'^{\mu\nu}E_{\mu\nu} + g'^{\nu\mu}H_{\nu\mu}) + a\gamma^{\mu\nu}\Gamma_\mu\Gamma_\nu + b A^{\mu\nu}(\partial_\nu\Gamma_\mu - \partial_\mu\Gamma_\nu),$$

где $\gamma^{\mu\nu}$ и $A^{\mu\nu}$ — соответственно симметрическая и антисимметрическая части $g'^{\mu\nu}$, a и b — произвольные константы, $H_{\nu\mu}$ получено из $E_{\mu\nu}$ перестановкой нижних индексов у всех $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$. Выражение I' удовлетворяет постулату эрмитовости, т. е. оно инвариантно при одновременной перестановке индексов у всех $g^{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}$ и нижних индексов у $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$, тогда как в теории Эйнштейна эрмитовости были подчинены лишь уравнения поля. В полученных обобщенных уравнениях поля Γ_μ входит как в уравнения, связывающие тензор $g_{\alpha\beta}$ с коэффициентами связности $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, так и в уравнения поля, содержащие $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ и их производные В случие $\Gamma_\mu = 0$, но если $\det|A^{\alpha\beta}| = 0$, то, не только в этом случае, получается известная из прежних теорий форма уравнений. При некоторых гипотезах о порядке малости различных членов, что физически соответствует возможности пренебрегать тяготением при рассмотрении связей электромагнитных величин, найдена приближенная простая форма уравнений, причем из нее при специальном выборе констант получаются уравнения Максвелла, а при другом выборе иная простая система, которая встречалась уже при исследованиях квантовой теории поля и которая допускает решение, не содержащее особенностей.

Б. Л. Лаптев

4568. Электромагнитное поле в движущейся анизотропной среде. Маркс (Das elektromagnetische Feld in bewegten anisotropen Medien. Marx G.), Acta phys. hung., 1953, **3**, № 2, 75—94 (нем.; резюме русск.)

Автор развивает феноменологическую релятивистскую электродинамику движущихся анизотропных сред. Электромагнитное поле в среде описывается двумя антисимметрическими тензорами

$$F_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{B}_z & -\mathfrak{B}_y & -i\mathfrak{E}_x \\ -\mathfrak{B}_z & 0 & \mathfrak{B}_x & -i\mathfrak{E}_y \\ \mathfrak{B}_y & -\mathfrak{B}_x & 0 & -i\mathfrak{E}_z \\ i\mathfrak{E}_x & i\mathfrak{E}_y & i\mathfrak{E}_z & 0 \end{pmatrix},$$

$$G_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{H}_z & -\mathfrak{H}_y & -i\mathfrak{D}_x \\ -\mathfrak{H}_z & 0 & \mathfrak{H}_x & -i\mathfrak{D}_y \\ \mathfrak{H}_y & -\mathfrak{H}_x & 0 & -i\mathfrak{D}_z \\ i\mathfrak{D}_x & i\mathfrak{D}_y & i\mathfrak{D}_z & 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathfrak{E}=(\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_z)$—напряженность электрического поля; $\mathfrak{H}=(\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_y\mathfrak{H}_z)$ — напряженность магнитного поля; $\mathfrak{B}=(\mathfrak{B}_x\mathfrak{B}_y\mathfrak{B}_z)$ — магнитная индукция; $\mathfrak{D}=(\mathfrak{D}_x\mathfrak{D}_y\mathfrak{D}_z)$ — электрическое смещение.

Тензоры F_{ik} и G_{ik} подчиняются уравнениям Максвелла

$$\left.\begin{aligned} \partial_k G_{ik}&=4\pi s_i, \\ \partial_i F_{kl}+\partial_k F_{li}+\partial_l F_{ik}&=0 \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Вводятся 4-векторы поля $E_i=F_{ik}u_k$, $D_i=G_{ik}u_k$, $B_i=-(i/2)\,\delta_{iklm}F_{lm}u_k$, $H_i=-(i/2)\times\delta_{iklm}G_{lm}u_k$, являющиеся релятивистским обобщением трехмерных векторов $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}$. Здесь u_i — 4-скорость среды ($u_i u_i=-1$); δ_{iklm} — единичный антисимметричный тензор.

Вектор тока s_i инвариантно разбивается на два слагаемых:

$$s_i=j_i+\rho_0 u_i \quad (u_i j_i=0,\ \rho_0=-u_i s_i), \qquad (2)$$

где j_i — ток проводимости, а $\rho_0 u_i$ — конвекционный ток. Обобщенный закон Ома записывается в виде

$$j_i=\sigma_{ik}E_k, \qquad (3)$$

где σ_{ik} — тензор электропроводности.

Электрическая и магнитная поляризуемость среды характеризуется тензорами ε_{ik}, $\varkappa_{ik}$, а связь между векторами поля устанавливается соотношениями

$$\left.\begin{aligned} D_i&=\varepsilon_{ik}E_k, \\ H_i&=\varkappa_{ik}B_k \end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

В случае изотропной среды тензоры поляризуемости принимают вид

$$\varepsilon_{ik}=\varepsilon(\delta_{ik}+u_i u_k),$$
$$\varkappa_{ik}=(1/\mu)(\delta_{ik}+u_i u_k),$$

где ε — диэлектрическая постоянная, а μ — магнитная проницаемость среды. Уравнения (1) — (4) представляют собой полную систему уравнений электродинамики для движущейся анизотропной среды. В нерелятивистском пределе развитая здесь теория переходит в обычную электродинамику покоящихся сред.

В заключительных параграфах работы автор строит функцию Лагранжа, из которой следуют предложенные им уравнения поля, и обычным способом выводит тензор энергии-импульса.

Ю. А. Гольфанд

4569. Геометрический подход к нерелятивистской теории спина. Пейн (A geometric approach to nonrelativistic spin theory. Payne W. T.), Amer. J. Phys., 1953, **21**, № 8, 621—628 (англ.)

Делается попытка дать элементарную геометрическую интерпретацию нерелятивистской теории спина электрона. Спинор реализуется в полярной системе координат при помощи радиального отрезка—ручки (handle)—с проходящей через него полуплоскостью—лопаткой (blade). Два полярных угла, соответствующих направлению ручки, и угол, образованный лопаткой с плоскостью меридиана, дают три эйлеровых угла. Важную роль при рассмотрении собственных значений играет операция отражения спинора в заданной оси. При этом отражении угол лопатки с плоскостью, проходящей через ручку и ось, сохраняется. За оператор энергии принимается произведение надлежаще подобранной физической константы на отражение спиноров в оси внешнего магнитного поля. Собственные спиноры оператора выражают тогда параллелизм и антипараллелизм магнитному полю, собственные значения вещественны и отличаются только знаком. Автор показывает, что аналитическая формулировка его геометрической схемы приводит к теории спина, принадлежащей В. Паули (W. Pauli). *Б. Л. Лаптев*

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

4570. Об одной теореме Кирцбрауна и Валентайна. Шёнберг (On a theorem of Kirzbraun and Valentine. Schoenberg I. J.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 9, 620—622 (англ.)

Дается новое элементарное доказательство теоремы Кирцбрауна (Kirzbraun M. D., Fundam. math., 1934, 22, 77—108), Валентайна (Valentine F. A., Bull. Amer. Math. Soc., 1943, 49, 100—108) и Майкла (Mickle E. J., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, 160—164).

Теорема 1. Если в евклидовом E_n задана совокупность m сфер $S(\bar{x}_i, r_i)$, $i=1,2,\ldots,m$, пересечение которых не пусто, а сферы $S(\bar{x}_i', r_i)$, $i=1,2,\ldots,m$, обладают тем свойством, что

$$|\bar{x}_i'-\bar{x}_j'|\leqslant|\bar{x}_i-\bar{x}_j|\ (i,j=1,2,\ldots,m), \qquad (1)$$

то пересечение сфер $S(\bar{x}_i', r_i)$, $i=1,2,\ldots,m$, также не пусто. Здесь точка $x_i\in E_n$ — центр и r_i —

радиус сферы $S(x_i, r_i)$, а $|x_1 - x_2|$ — расстояние между точками x_1 и x_2. Эту теорему можно выразить в такой эквивалентной форме:

Теорема 2. Если $\bar{x}_i$, $\bar{x}_i'$, $i=1,2,\ldots,m$,—точки E_n, удовлетворяющие (1), и $\bar{p}$ — произвольная точка E_n, то существует такая точка $\bar{p}' \in E_n$, что

$$|\bar{p}' - \bar{x}_i'| \leqslant |\bar{p} - \bar{x}_i|, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (2)$$

Автор дает новое элементарное доказательство теоремы 2.

Для доказательства рассматривается функция

$$f(\bar{x}) = \max_i \frac{|\bar{x} - \bar{x}_i'|}{|\bar{p} - \bar{x}_i|}, \quad \bar{p} \neq \bar{x}_i \ (i = 1, 2, \ldots, m),$$

и при помощи равенства $f(\bar{p}') = \min_{\bar{x} \in E_n} f(\bar{x})$ определяется точка $\bar{p}'$, удовлетворяющая (2).

Д. Л. Берман

4571. Покрытие n-мерного пространства сферами. Эрдёш, Роджерс (The covering of n-dimensional space by spheres. Erdös Paul, Rogers C. A.), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 3, № 111, 287—293 (англ.)

Рассматриваются покрытия n-мерного куба объема V системами m равных сфер, имеющих, каждая, объем I. Плотность покрытия определяется как mI/V, где mI — сумма объемов сфер. Показывается, что нижний предел θ^* плотности покрытия при $V \to \infty$ удовлетворяет неравенству $\theta^* > (^{16}/_{15}) - \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Авторы видоизменяют доказательство сходной теоремы Бамба и Давенпорта (Bambah R. P., Davenport H., J. London Math. Soc., 1952, 27, 224—229), где устанавливается аналогичное неравенство $\theta > (^4/_3) - \varepsilon_n$ при добавочном условии, что центры сфер образуют решетку.

В. В. Рыжков

4572 К. Угол и сумма углов в n-мерном евклидовом симплексе. Хён (Winkel und Winkelsumme im n-dimensionalen euklidischen Simplex. Höhn Walter, Thesis, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 1953, 39 pp.)

Задаваясь n-мерным симплексом, сферическим или евклидовым, обозначим через s_k сумму углов в его $\binom{n+1}{k}(n-k)$-клетках, измеряемых каждый как дробь целого угла, в рассматриваемой $(n-k)$-грани. Например, $s_0 = 1$, $s_1 = (n+1)/2$. Пуанкаре (Poincaré, C. r. Acad sci., 1905, 140, 113—117) показал, что $\sum_0^n (-1)^k s_k = \{1 + (-1)^n\}\Omega$, где Ω — объем симплекса как части всего пространства (так что в евклидовом случае $\Omega = 0$). Интегрированием произведения «характеристических функций» автор получает неравенство

$$\binom{[(n+1)/2]}{k} + \binom{[(n+2)/2]}{k} \leqslant 2s_k \leqslant \binom{n}{k}$$

и уравнения

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n+1-k}{n+1-p} s_k = s_p,$$

которые содержат формулу Пуанкаре как случай $p = n+1$, если условимся считать $s_{n+1} = \Omega$. Они выполняются для всех значений p от 1 до $n+1$, но система независимых уравнений получается при чередующихся значениях (включая $n+1$). Автор, очевидно, не знаком с работой Соммервилля (Sommerville D. M. Y., Proc. Roy. Soc. London, 1927, A115, 103—119), который дал другую группу из такого же числа уравнений. При обозначениях автора они имеют вид

$$\sum_{k=r}^{n+1} (-1)^k \binom{k}{r} s_k =$$

$$= \sum_{k=n+1-r}^{n+1} - \binom{k}{n+1-r} s_k \times$$

$$\times (r = 0, 1, \ldots, [n/2]).$$

Эквивалентность двух групп уравнений легко проверяется при малых значениях n, но далеко не очевидна в общем случае.

H. S.M. Coxeter

Перевод из Math. Rev., 1954, 15, № 1, 55.

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

4573. Сообщение о внутренней геометрии поверхностей А. Д. Александрова. Ринов (Bericht über die innere Flächentheorie A. D. Alexandrovs. Rinow W.), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1953, 56, № 2—3, 77—87 (нем.)

Кратко излагаются основные результаты А. Д. Александрова и его учеников по теории выпуклых поверхностей, изложенные в книге А. Д. Александрова «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей» и в ряде статей в Докл. АН СССР.

А. В. Погорелов

4574. Плоские геометрии, порождаемые выпуклыми пластинками. Шолендер (Plane geometries from convex plates. Sholander Marlow), Pacif. J. Math., 1953, 3, № 3, 667—671 (англ.)

Выпуклой пластинкой K называется двумерное выпуклое тело в плоскости E, кривая, его ограничивающая, обозначается через K^0, внутренность— через I. Из двух параллельных опорных прямых направления φ через t_0 обозначается та, которая ограничивает полуплоскость, содержащую направление $\varphi + \pi/2$ и пластинку K. Вторая опорная прямая обозначается через t_1. Прямая t_i, параллельная t_0 и t_1, делит расстояние между ними в отношении $i:(1-i)$ и пересекает K^0 в точках R_i и T_i так, что R_iT_i имеет направление φ. Множество $S_i(\varphi)$ точек S_{ij}, делящих R_iT_i в отношении $j:(1-j)$—открытая жорданова дуга (равноделящая параллельных хорд, а strut), заканчивающаяся в точках касания t_0, t_1 с K^0. Две равноделящие, не имеющие общих точек (или совпадающие), называются параллельными. Для одного φ, S_j и S_k всегда параллельны. О свойствах равноделящих говорит следующая теорема:

Если для двух указанных направлений φ и ψ

$S_j(\varphi)$ и $S_k(\psi)$ имеют две общие точки P и Q, то им принадлежат все точки отрезка PQ. Такие сегменты PQ встречаются в том и только в том случае, когда K^0 содержит, по крайней мере, два прямолинейных отрезка. Ограничиваясь такими K, что граница их имеет не более одного прямолинейного отрезка и не имеет углов, можно утверждать, что: 1) две различные точки в I принадлежат одной и только одной равноделящей; 2) через данную в I точку P проходит одна и только одна равноделящая, параллельная заданному $S_i(\varphi)$; 3) в I существуют три точки, не лежащие на одной равноделящей, т. е, выполняются три аксиомы Артина (Биркгоф Г., Теория структур, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1952, 161), характеризующие плоскую афинную геометрию. Также ставится вопрос об условиях выполнения четвертой аксиомы Артина и рассматривается возможность ассоциирования с выпуклыми пластинками других геометрий. *В. В. Рыжков*

4575. Изопериметрические и родственные им задачи для ограниченных плоских точечных множеств. О м а н (Isoperimetrische und verwandte Extremalprobleme für beschränkte ebene Punktmengen. O h m a n n D.), J. reine und angew. Math., 1953, **192**, № 2, 65—73 (нем.)

Для обычных характеристик выпуклых областей, таких как периметр U, площадь F, диаметр D и ширина Δ, строятся аналоги для случая произвольных ограниченных точечных множеств. Место площади занимает внутренняя и внешняя мера Лебега m и M множества A. Ширина в направлении φ заменяется внутренней (внешней) линейной мерой $q(\varphi)(Q(\varphi))$ множества $A(\varphi)$, получаемого проектированием A в направлении φ на прямую направления $\varphi+\pi/2$; $q(\varphi)$, $Q(\varphi)$ получают названия внутренней и внешней поперечной меры (Querma ss) в направлении φ. Экстремальные значения q_1, q_2, Q_1, Q_2 величин $q(\varphi), Q(\varphi)$, такие что $q_1 \geqslant q(\varphi) \geqslant q_2$, $Q_1 \geqslant Q(\varphi) \geqslant Q_2$, заменяют собою диаметр и ширину и получают названия (внутренней и внешней) главной и побочной поперечной меры (Haupt- und Nebenquerma ss). Аналогом периметра служат нижние интегралы Лебега

$$u = \frac{1}{2}\underline{\int_0^{2\pi}} q(\varphi)\,d\varphi,$$

$$U = \frac{1}{2}\underline{\int_0^{2\pi}} Q(\varphi)\,d\varphi.$$

Существенную роль в рассуждениях играет понятие телесных областей R'_A, R''_A (Rumpfbereiche) множества A.

Для получения R'_A, (R''_A) строятся прямые $G'(\varphi)$, $(G''(\varphi))$ направления φ, отстоящие от фиксированной точки O на $q(\varphi)/2$, $(Q(\varphi)/2)$; пересечение полуплоскостей, определяемых этими прямыми и содержащих O, не пусто, но представляет выпуклую область R'_A (R''_A) с внутренней точкой. Условия, при которых это имеет место, не оговорены. Между характеристиками множеств A и R'_A, R''_A имеется ряд неравенств:

$$q(R'_A, \varphi) \leqslant q(A, \varphi) \qquad m(R'_A) \geqslant m(A)$$

$$Q(R''_A, \varphi) \leqslant Q(A, \varphi) \qquad M(R''_A) \geqslant M(A).$$

Если решение экстремальной задачи для выпуклых областей B выражается неравенством $\Phi(B; q_1, q_2, u, m) \geqslant 0$, где Φ монотонно растет с q_1, q_2, u и монотонно убывает с ростом m, то при помощи неравенств для R'_A, R''_A и A находятся аналогичные соотношения для любых множеств A. Так получаются неравенства

$$u^2 - 4\pi m \geqslant 0, \quad \pi q_1^2 - 4m \geqslant 0, \quad 2uq_2 - \pi q_2^2 - 4m \geqslant 0,$$

$$q_1^2 \arcsin(q_2/q_1) + q_2\sqrt{q_1^2 - q_2^2} - 2m \geqslant 0$$

и аналогичные им с заменой u, m, q_1, q_2 на U, M, Q_1, Q_2. *В. В. Рыжков*

4576. Дополнение к теореме Хелли. Л е в и (Eine Ergänzung zum Hellyschen Satze. L e v i F. W.), Arch. Math., 1953, **4**, № 3, 222—224 (нем.)

Для семейства выпуклых множеств C_j в n-мерном евклидовом пространстве R_n исследуется зависимость высказываний: $\mathfrak{A}_m$. Сумма m любых множеств C_j имеет связное дополнение. $\mathfrak{B}_m$. Пересечение m любых множеств C_j не пусто.

Для $k < m$ предложение $\mathfrak{B}_k$ следует из $\mathfrak{B}_m$, но $\mathfrak{A}_k$ не следует из $\mathfrak{A}_m$. Теорема Хелли утверждает, что из $\mathfrak{B}_{n+1}$ следует каждое $\mathfrak{B}_m$. Если $n > 1$ и все C_j ограничены, то $\mathfrak{A}_m$ следует из $\mathfrak{B}_m$.

В работе доказывается: 1. Если выпуклые множества C_j все замкнуты, то $\mathfrak{B}_{n+1}$ следует из $\mathfrak{B}_n$ и $\mathfrak{A}_{n+1}$. Индекс n можно заменить индексом q, большим n. 2. Если $n > 1$ и все множества C_j данного семейства выпуклы, замкнуты и ограничены, то $\mathfrak{A}_s$ верно для $s \leqslant n$. *З. И. Ковлова*

4577 К. Теория и приложения геометрии расстояния. Б л ю м е н т а л (Theory and applications of distance geometry. B l u m e n t h a l L e o n a r d M.), XI + 347 pp., Oxford, at the Clarendon Press, 1953, 10.00 doll.) (англ.)

После работы Менгера (Menger, Maht. Ann., 1928, **100**, 75—163) область, получившая наименование метрической топологии или геометрии расстояния (т. е. геометрии подгруппы гомеоморфизмов, для которых расстояние двух точек является инвариантом), весьма разрослась и по содержанию и по приложениям. Первый обзор был дан автором в его превосходной книге о геометрии расстояния (Univ. of Missouri Studies, 1938, **13**, № 2). Настоящая книга представляет детальную, законченную и во многих направлениях весьма полную трактовку теории.

В части I рассматриваются полуметрические и метрические пространства, начиная с предварительных понятий и примеров. Вводятся понятия выпуклости и «между», а также определение и характеристические свойства метрических отрезков. Одна глава посвящена теории кривых в мет-

рических пространствах; даны и исследованы понятия длины дуги, геодезических дуг и различные определения кривизны и кручения. Нет ссылок на работу Буземана (Busemann) по метрическим методам в пространствах Финслера.

В части II рассматривается геометрия расстояния в евклидовом (E_n) и гильбертовом ($\mathfrak{H}$) пространствах. Фундаментальной проблемой геометрии расстояния является так называемая «проблема пространства»; вопрос заключается в отыскании необходимых и достаточных метрических условий того, чтобы некоторое произвольное пространство расстояний из определенного класса $\{S\}$ было конгруентно некоторому члену заданного подкласса $\{S\}$. Эта проблема решена для класса полуметрических пространств и подкласса, состоящего из одного пространства E_n, и для класса сепарабельных полуметрических пространств и подкласса, состоящего из одного $\mathfrak{H}$. Условия выражены в терминах так называемых определителей Кэли — Менгера (Cayley — Menger). Даны и другие заслуживающие внимания метрические характеристики E_n и $\mathfrak{H}$; например, конечно-компактное, выпуклое, внешне-выпуклое полуметрическое пространство, обладающее слабым евклидовым четырехточечным свойством, конгруентно евклидову пространству конечной размерности.

Часть II содержит также исследование индексов конгруентности некоторых евклидовых подмножеств (правильный многоугольник, коническое сечение, окружность) относительно класса полуметрических пространств и относительно класса подмножеств в E_n. Говорят, что пространство R имеет индексы конгруентности (n,k) относительно класса $\{S\}$, если каждое пространство S из $\{S\}$, содержащее более чем $n+k$ попарно различных точек, конгруентно погружаемо в R, если всякие n его точек, необязательно попарно различных, обладают этим свойством. Если индексы конгруентности будут $(n, 0)$, то n называется «порядком конгруентности» (congruence order) R относительно $\{S\}$. Типичной теоремой, доказанной в этом направлении, является следующая: круговая площадка радиуса r имеет порядок конгруентности, равный трем относительно подмножеств E_2.

Часть III содержит геометрию расстояния неевклидовых пространств (сферического $S_{n,r}$ — измерения n и радиуса r, эллиптического $\mathscr{E}_{n,r}$ и гиперболического $\mathscr{H}_{n,r}$). Некоторые определители, представляющие обобщение определителей Кэли—Менгера евклидовых пространств, играют здесь фундаментальную роль при решении проблемы пространства и при получении некоторых характеристик рассматриваемых пространств. Некоторые необходимые свойства этих пространств, которые нелегко отыскать в литературе, выводятся в этой книге. Найдено, что эти свойства не характеризуют неевклидовы пространства; они дают начало определению некоторых полуметрических пространств с геометрией расстояния, идентичной геометрии неевклидовых пространств. Например, функция гиперболический косинус, характерная для гиперболического пространства, может быть заменена какой-либо функцией из некоторого широкого класса функций без существенного изменения в геометрии расстояния рассматриваемого пространства. Некоторые сферические теоремы типа теорем Хэлли (Helly) рассматриваются подробно, как и индексы конгруентности полусфер и малых шапочек. Особенно привлекательна и интересна метрическая геометрия эллиптического пространства $\mathscr{E}_{n,r}$. Необходимое различие между конгруентностью и наложимостью дает начало примечательным вопросам о существовании равносторонних подмножеств в $\mathscr{E}_{n,r}$, решенным только для $n \leqslant 3$.

Одна из глав посвящена следующим проблемам: а) найти необходимые и достаточные условия наложимости двух конгруентных подмножеств в $\mathscr{E}_{n,r}$; б) определить, когда данная конгруентность между двумя подмножествами в $\mathscr{E}_{n,r}$ может быть распространена на все пространство. Случай эллиптической плоскости рассматривается подробно; введены некоторые свободно подвижные конфигурации, которые полезны для получения порядка конгруентности $\mathscr{E}_{2,r}$ относительно класса всех полуметрических пространств. Аналогичный порядок конгруентности $\mathscr{E}_{n,r}$ для $n > 2$ неизвестен.

Часть IV посвящена приложениям геометрии расстояния. Даны три примера: а) приложения к теории определителей (некоторые свойства определителей типа Кэли—Менгера, трудно доказуемые чисто алгебраическим путем, искусно доказаны путем использования их метрического смысла); б) приложения к системам линейных неравенств (возникшим в результате рассмотрения индексов конгруентности полусфер и малых шапочек и теорем пересечения для выпуклых подмножеств в $S_{n,r}$); в) приложения к теории структур (нормированная структура L может быть сделана метрическим пространством $D(L)$ присоединением к каждой паре элементов x, y структуры L «расстояния» $(x, y) = |x+y| - |xy|$; тогда метрические понятия и отношения в $D(L)$, такие как расположение между, конгруентное погружение, ... приводят к понятиям и отношениям в L). Приложения к вариационному исчислению не даны.

Книга написана очень хорошо; изложение ясное и доказательства проведены тщательно. Они содержат, главным образом, оригинальные результаты автора в этой области. Каждая глава снабжена примерами и завершается ссылками на литературу, относящуюся к рассматриваемому материалу. Курс общей топологии и курс абстрактной алгебры это все, что может быть рекомендовано в качестве подготовки, хотя и не являющейся необходимой, для полного понимания изложения автора *L. A. Santaló.*

Перевод из Math. Rev., 195[ ], **14**, № 10, 1009.

4578 К. Выпуклые тела. Люстерник Л. А. Перев. на груз. яз. со 2-го изд. под ред. Е. Цитланадзе, 158 стр., изд. Н.-и. ин-та пед. наук М-ва просвещ. ГрузССР, Тбилиси, 3 р. 75 к. (библ.)

См. также: 4302 К, 4337, 4375, 4425—4427, 4445, 4459, 4484

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

4579. Об одном методе решения алгебраических уравнений. Белостоцкий А. Я., Успехи матем. наук, 1953, 8, № 6 (58), 87—96

Итерационный метод Лина для разложения многочлена

$$P_n(x) = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n$$

на множители $d_m(x) = x^m - b_1 x^{m-1} + \ldots + (-1)^m b_m$ и $q_{n-m}(x) = c_0 x^{n-m} - c_1 x^{n-m-1} + \ldots + (-1)^{n-m} c_{n-m}$ состоит в следующем. Берем в качестве начального приближения к $d_m(x)$ многочлен $d'_m(x) = x^m - b'_1 x^{m-1} + \ldots + (-1)^m b'_m$. Предпоследний остаток, получаемый при делении $P_n(x)$ на $d'_m(x)$, будет, вообще говоря, полиномом степени m. Если его коэффициенты разделить на коэффициент при x^m, то получим так называемый приведенный предпоследний остаток. Он и берется за новое приближение к $d_m(x)$. Метод Лина, называемый также методом предпоследнего остатка, изучался в работе Эйткина (см. реф. 4581).

В реферируемой работе дана модификация метода Лина, которая сводится к следующему. Метод Лина применяется не к $P_n(x)$, а к многочлену $\widetilde{P}'_{n+m}(x) = P_n(x) K'_m(x)$, где

$$K'_m(x) = \xi'_0 x^m - \xi'_1 x^{m-1} + \ldots + (-1)^{m-1} \xi'_{m-1} x + 1$$

подбирается специальным образом. Именно, обозначим через

$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m)$, $\varepsilon_i = b'_i - b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, вектор ошибки начального приближения и через $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_m)$ вектор ошибки следующего приближения, получаемого применением метода предпоследнего остатка к $\widetilde{P}'_{n+m}(x)$. Числа $\xi'_0, \xi'_1, \ldots, \xi'_{m-1}$ подбираются так, чтобы компоненты вектора ε' имели более высокий порядок малости, чем компоненты ε: $\varepsilon' = o(\varepsilon)$. Определение ξ'_i сводится к решению некоторой линейной алгебраической системы m уравнений с m неизвестными.

Указана вычислительная схема. Она включает решение упомянутой алгебраической системы. Результаты вычислений, проводимых при построении этой системы, используются при нахождении предпоследнего остатка многочлена $\widetilde{P}'_{n+m}(x)$. Приведен численный пример. Один шаг вычислений по модифицированному методу в примере равносилен примерно семи итерациям по методу предпоследнего остатка.

Доказано, что алгоритм модифицированного метода применим и при этом выполнено соотношение $\varepsilon' = o(\varepsilon)$, если $d_m(x)$ и $q_{n-m}(x)$ не имеют общих корней и если $d'_m(x)$ достаточно близко к $d_m(x)$.

См. также РЖМат, 1954, 2352. *И. П. Мысовских*

4580. Заметка о методе Лина разложения многочленов на множители. Хилдебранд (Note on S. N. Lin's method of factoring polynomials. Hildebrand F. B.), J. Math. and Phys., 1953, **32**, № 2—3, 164—170 (англ.)

Метод Лина разложения многочлена $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ на множители позволяет строить последовательность многочленов степени m, $0 < m < n$, сходящуюся при некоторых условиях к одному из делителей степени m многочлена $f(z)$ (см. описание метода, например, в переводе статьи А. Эйткина, реф. 4581).

В работе дано условие асимптотической устойчивости метода Лина для частного случая $m = 2$. Пусть $z^2 + Pz + Q$ — искомый делитель. Обозначим через z_1, z_2 его корни и через $z_3, z_4, \ldots, z_n$ — остальные корни $f(z)$. Доказано следующее утверждение: метод Лина асимптотически устойчив вблизи пары корней (z_1, z_2) тогда и только тогда, когда

$$\left|1 - \left(1 - \frac{z_i}{z_3}\right)\left(1 - \frac{z_i}{z_4}\right)\ldots\left(1 - \frac{z_i}{z_n}\right)\right| < 1 \; (i = 1,)\text{-}.$$

В случае, когда $f(z)$ — многочлен четвертой степени, дана геометрическая интерпретация указанного условия. Приведен численный пример и дано объяснение некоторых особенностей сходимости.

И. П. Мысовских

4581. О разложении многочленов на множители итерационными методами. Эйткин А., Успехи матем. наук, 1953, 8, № 6 (58), 71—86

4582. Новый способ интегрирования. Лоткин (A new integration procedure. Lotkin M.), J. Math. and Phys., 1953, **32**, № 2—3, 171—179 (англ.)

Рассматривается вопрос о применении к численному интегрированию просто получаемой формулы (Lotkin M., J. Math. and Phys., 1952, **31**, 29—34)

$$\int_{x_0}^{x_1} f dx = h\left[\frac{1}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{10}(f'_0 - f'_1) + \frac{h^2}{120}(f''_0 + f''_1)\right] + R, \qquad (1)$$

$h = x_1 - x_0$, $R = -(h^7 / 100800) f^{\mathrm{VI}}(\xi)$, $x_0 < \xi < x_1$, позволяющей увеличивать точность формулы трапеций. Считается, что функция f известна для равноотстоящих значений аргумента $x_k = x_0 + kh$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$. Производные, входящие в основную формулу (1), выражаются через значения функции f при помощи центральных разностей

$$hf'_i = \mu\delta f_i - \frac{1}{6}\mu\delta^3 f_i + \frac{1}{30}\mu\delta^5 f_i + \ldots,$$

$$h^2 f''_i = \delta^2 f_i - \frac{1}{12}\delta^4 f_i + \frac{1}{90}\delta^6 f_i - \ldots$$

и строятся три формулы для приближенного вычисления:

1) если в выражениях для f' и f'' взять только

первые члены, то

$$\int_{x_0}^{x_1} f dx \approx \frac{h}{24}\,[13\,(f_1+f_0)-(f_2+f_{-1})]; \qquad (2)$$

2) если в тех же выражениях взять по два члена, то

$$\int_{x_0}^{x_1} f\,dx \approx (h/1440)\,[802\,(f_1+f_0)- -93\,(f_2+f_{-1})+11\,(f_3+f_{-2})]; \qquad (3)$$

3) если же взять по три члена, то

$$\int_{x_0}^{x_1} f dx \approx (h/21600)\,[12200\,(f_1+f_0)-1701\,(f_2+f_{-1})+ +335\,(f_3+f_{-2})-34\,(f_4+f_{-3})]. \qquad (4)$$

Даются представления остаточных членов и приводятся примеры вычислений с хорошей точностью результатов. Приводятся соображения по программированию вычислений при помощи предложенных формул на машинах с фиксированной запятой.

Примечание референта. Основная формула автора (1) отличается от хорошо известной формулы Эйлера — Маклорена того же порядка точности

$$\int_{x_0}^{x_1} f dx = \frac{h}{2}\,(f_0+f_1)-\frac{h^2}{12}\,[f_1'-f_0']+ +\frac{h^4}{720}\,[f_1'''-f_0''']+R_1.$$

Но если в последней производные заменить их выражениями через значения функции, указанные в реферате, и ограничиться разностями до первого или до третьего порядка, то, как легко видеть, получатся формулы (2) или (3). Формулы (2) и (3) являются поэтому только другой записью отрезков хорошо известного конечноразностного видоизменения формулы Эйлера — Маклорена (Уиттекер Е. Т., Робинсон Г., Математическая обработка результатов наблюдений, М.—Л., 1933, 140) и их нельзя считать новыми.

По поводу (4) необходимо отметить следующее. Если в приближенных выражениях для hf' и h^2f'' через центральные разности взять по три члена, то погрешность в формуле (1) будет величиной порядка h^9. Остаточный же член этой формулы есть величина порядка h^7. Такую несогласованность в порядках двух частей погрешности равенства (4) можно было бы устранить, взяв еще один член и увеличив порядок остатка. *В. И. Крылов*

4583. **Элементарные графические методы исследования интерференционных свойств одно- и двухслойных неабсорбирующих оптических интерференционных пленок. Меснер** (Elementare graphische Methoden zur Darstellung der Interferenzeigenschaften von ein- und zweikomponentigen absorptionsfreien optischen Interferenzschichten. Messner R.). Feinwerktechnik, 1953, 57, № 10, 297—305 (нем.)

Задача расчета интерференционных пленок сводится к исследованию функции комплексного переменного, определяемой рекуррентным соотношением

$$\Re_{x+1}=\frac{r_{x+1,\,x}+\Re_x e^{-i\Delta_x}}{1+r_{x+1,\,x}\,\Re_x e^{-i\Delta_x}}, \qquad (1)$$

где френелевские коэффициенты $r_{x+1,\,x}$ определяются выражениями

$${}_s r_{x+1,\,x}=\frac{n_{x+1}\cos\alpha_{x+1}-n_x\cos\alpha_x}{n_{x+1}\cos\alpha_{x+1}+n_x\cos\alpha_x},$$

$${}_p r_{x+1,\,x}=\frac{n_x\cos\alpha_{x+1}-n_{x+1}\cos\alpha_x}{n_x\cos\alpha_{x+1}+n_{x+1}\cos\alpha_x},$$

здесь n_x — показатель преломления слоя с номером x; α_x — угол падения на поверхность раздела слоев с номерами x и $x-1$; Δ_x — сдвиг фазы в слое с номером x, толщина которого d_x. Для Δ_x имеем формулу

$$\Delta_x=4\pi\frac{n_x d_x}{\lambda}\cos\alpha_x \quad (\lambda \text{ — длина волны света}).$$

Значки слева у $r_{x+1,\,x}$ означают, что соответствующий коэффициент вычисляется для света, линейно поляризованного в плоскости, перпендикулярной или параллельной к плоскости падения. Формула (1) справедлива как для ${}_s r_{x+1,\,x}$, так и для ${}_p r_{x+1,\,x}$. Величины n_x, r (а следовательно, и $\Re$) в общем случае комплексные.

В реферируемой статье рассматриваются случаи одно- и двухслойной пленок. Преобразовывая соотношение (1) к виду уравнения окружности в комплексной форме, автор приводит нахождение $\Re_2$, $\Re_3$ к построению системы окружностей, построению углов и проведению прямых линий. При помощи выполненных построений удается графически решать важный вопрос о выборе толщин пленок так, чтобы при заданной длине волны получилось $\Re_3=0$, и построить график зависимости $\Re_3=\Re_3(\lambda)$. *П. П. Касьянков*

4584. **Графическое решение интегральных уравнений. Харкеевич Ю. Ф.**, Инж. сб. Ин-та механики АН СССР, 1953, 15, 207—215

Дается графическое решение интегральных уравнений и пространственная иллюстрация его. Основой является геометрическая интерпретация интеграла, зависящего от переменного параметра x, и известный метод последовательных приближений для интегральных уравнений.

Функция $K(x, s)$ под знаком интеграла

$$\psi(x,\,s)=\int K(x,\,s)\cdot\varphi(s)\cdot ds$$

и интегральная функция $\psi(x, s)$ интерпретируются как поверхности, простирающиеся над областью задания ядра.

Для решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\,s)\cdot\varphi(s)\,ds$$

с ядром, заданным над квадратом $a \leqslant x,\ s \leqslant b$, вычерчиваются кривые «сечений» $K(x_i, s)$ ядра $K(x, s)$, соответствующие фиксированным значениям $a \leqslant x_i \leqslant b$ аргумента x. Затем способом А. Б. Штыкана (Инж. сб., 1952, **13**, 178—186) строятся кривые j-го приближения

$$y_{ij}(s) = \lambda \int_a^s K(x_i, s) \cdot \varphi_j(s) \cdot ds,$$

рассматриваемые как сечения $\psi(x_i, s)$ поверхности $\psi(x, s)$, причем при $j = 0$ $\varphi_0(s) = f(s)$. Разность ординат каждой из кривых $y_{ij}(s)$ на границах сегмента $[a, b]$ дает значение определенного интеграла

$$y_{ij} = \lambda \int_a^b K(x_i, s) \cdot \varphi_j(s)\, ds.$$

Проделав это для некоторого числа n фиксированных значений $x = x_i\ (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$, находим суммы отрезков $\varphi_{j+1}(x_i) = f(x_i) + y_{ij}$, равные соответствующим ординатам $(j+1)$-го приближения искомой кривой $\varphi(x)$. Указанная операция повторяется до совпадения, в пределах потребной точности, двух последовательно построенных кривых $\varphi_j(x)$ и $\varphi_{j+1}(x)$.

Решение интегральных уравнений Вольтерра отличается тем, что берутся сечения поверхностей, определенных над областью треугольника $x \geqslant s \geqslant a$. В этом случае последовательные приближения, как известно, сходятся при любых значениях параметра λ. На структуру ядер в обоих случаях налагается лишь требование ограниченности в области интеграции и конечности множества линий разрыва 1-го рода. Дан также способ графического решения однородных уравнений с симметрическими ядрами.

В опубликованных ранее работах (Pascal E., Rend. R. Accad. Sci. fis e mat. Napoli, 1913, **3**, **19**; Tea P., J. Math. Phys., 1945, **24**, 2; 1948, **26**, 403—419) охватывается менее широкий класс решаемых задач. *А. Б. Штыкан*

4585. Применение матричного исчисления в задачах экономики производства. Пихлер (Anwendung der Matrizenrechnung auf betriebswirtschaftliche Aufgaben. Pichler O.), Ingr-Arch., 1953, **21**, № 2, 119—140 (нем.)

Рассматривается «производственная цепь», состоящая из связанных между собой элементарных производств. Каждое элементарное производство описывается матрицей, преобразующей входной вектор (его координаты — количества продуктов, поступающих в производство) в выходной вектор, координаты которого — количества изготовляемых продуктов. Из матриц элементарных производств составляется структурная матрица всей производственной цепи. Приведены два простых примера: «неразветвленная» производственная цепь и производственная цепь «с обратным входом» (часть продуктов, произведенных в некоторых циклах, является входным продуктом для предыдущих циклов). В простейшем случае структурная матрица есть произведение матриц элементарных производств. Автор отмечает возможность учитывать и другие факторы, например: расход энергии, амортизацию оборудования, затраты рабочей силы.

Предлагаемый способ позволяет значительную часть расчетов произвести заранее; в текущих расчетах остается находить произведение матрицы на вектор, что не требует высокой квалификации вычислителя. *Г. Ш. Рубинштейн*

4586. Применение матричного исчисления при наблюдении за ходом производства. Пихлер (Anwendung der Matrizenrechnung zur Erfassung von Betriebsabläufen. Pichler O.), Ingr-Arch., 1953, **21**, № 3, 157—175 (нем.)

Работа примыкает к предыдущей (см. реф. 4585). Автор преобразует матрицу процесса к виду, более удобному для использования при наблюдении за ходом производственного процесса. Для ряда случаев рассматривается так называемая обратная задача: вычисление входного вектора по заданному выходному. *Г. Ш. Рубинштейн*

4587. Решение нормальных уравнений методом последовательных приближений. Вяль М., Сб. студ. науч.-исслед. работ Белорусской с.-х. акад., 1953, № 1, 88—98

Из рассмотрения одного примера (решение 4 уравнений несколькими способами) делаются известные выводы, что метод последовательных приближений следует применять в случаях, когда число уравнений достаточно велико, когда квадратичные коэффициенты значительно больше по абсолютной величине, чем неквадратичные, и когда неизвестные требуется знать с невысокой точностью.

В изложении имеются погрешности редакционного характера. *В. В. Попов*

4588. Теоремы о погрешностях и предельных погрешностях. Клаври (Théorèmes sur les erreurs et incertitudes. Claverie Jean), Inform. scient., 1953, № 5, 164—169 (франц.)

Приводятся правила и примеры нахождения погрешностей результатов арифметических действий.

4589. Числовые и графические вычисления. Руски (Calcolo numerico e calcolo grafico. Rusconi Franco), Riv. meccanica, 1953, **4**, № 68, 17—24 (итал.)

Обзор применения простейших средств для технических вычислений: счетной линейки, графиков и более подробно номограмм. Дается характеристика различных видов номограмм и настоятельно рекомендуется широко пользоваться номограммами в технических вычислениях. *М. К. Керимов*

4590. Децибеллы и дармштадтская счетная линейка. Хегорд (Decibels og Darmstadt-regnestokke. Heegaard Fr.), Ingeniøren, 1953, **62**, № 47, 863 (дат.)

Заметка о вычислении выражений вида

$$dB = 20 \log n$$

на обычной и на «дармштадтской» счетной линейке (с показательной шкалой). *Д. П.*

4591. Номограмма для расчета цилиндрических катушек. Хоппе (Nomograma pentru calculul bobinelor cilindrice. Hoppe E.), Electrotehnica, 1953, **1**, № 7, 25—29 (рум.; резюме русск.)

Дается подробный расчет номограммы из выравненных точек для формулы

$$R\% = \frac{100 + W\%\, h/d}{100\,(1 + h/d)}\, .W\%.$$

П. В. Николаев

4592. Номограмма для пересчета весовых процентов в молярные. Б е р (Ein Nomogramm zur Umrechnung von Gewichts - und Molprozenten. B a e h r H. D.), Chem.-Ingr-Techn., 1953, **25**, № 11, 676—677 (нем.)

Приводится номограмма из выравненных точек для формулы

$$x = \frac{100}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{100 - \xi}{\xi}},$$

где x — молярный процент, ξ — весовой процент первого вещества, μ_1 и μ_2 — молекулярные веса первого и второго веществ. Шкалы x и ξ расположены на окружности, шкала μ_1/μ_2 — на диаметре. *Г. С. Хованский*

4593. Новая номограмма для расчета труб под давлением. К а с т а н ь е (Un nouvel abaque pour le calcul des tubes resistants à la pression. C a s t a n i é H.), Rev. aluminium, 1953, **30**, № 204, 420—421 (франц.)

Приводится сетчатая номограмма с логарифмическими шкалами для формулы

$$N = \frac{1}{2}\,\frac{p}{(e/d)},$$

используемой для определения условий эксплуатации алюминиевых труб, находящихся под давлением жидкости или газа. Здесь p — давление, e — толщина стенки трубы, d — внутренний диаметр. *С. М. Головина*

4594. Сколько материала снимается при сверлильных и токарных работах? М ё р ф и (How much material is removed in turning and boring? M u r p h y L o u i s J.), Mill and Factory, 1953, **53**, № 3, 126 (англ.)

Предлагается номограмма из выравненных точек для определения количества материала, снимаемого при сверлильных и токарных работах (в куб. дюймах в 1 мин.) в зависимости от скорости резания (в фут/мин), толщины стружки (в дюймах) и величины подачи (в дюймах). Номографируется формула $M = 12\ cfd$. *Г. Е. Джемс-Леви*

4595. Графические вычисления (Номограмма № 19). Теплопроводность дерева. О р л и ч е к (Graphische Umrechnungsbilder (Nomogramm Nr. 19). Die Wärmeleitfähigkeit von Holz. O r l i c e k A. F.), Mitt. Chem. Forschungsinst. Wirtsch. Österr., 1953, **7**, № 5, 104—105 (нем.)

Номограмма из выравненных точек для определения теплопроводности дерева по удельному весу и влажности. *Г. С. Хованский*

4596. Номограмма для определения нормальной составляющей ветра на вертикальных разрезах. К о з и к Е. М., Тр. Ин-та матем. и механики АН УзССР, 1953, № 12, 102—108

4597 РЕЦ. Руководство по номографии. М е й е р - ц у р - К а п е л л е н (Leitfaden der Nomographie. M e y e r z u r C a p e l l e n W., IV + 178 S., 203 Bild., Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1953, 17.40 DM) [**Рецензия: М л у д е к** (Mludek H.), Technik, 1954, **9**, № 1, 63 (нем.)]

4598 Д. О функциях, номограммы которых имеют проективную ответную шкалу. Д ж е м с-Л е в и Г. Е. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1954

ТАБЛИЦЫ

4599. Таблица полной функции Чикала. Л ь ю к, А ф ф о р д (A table of the complete Cicala function. L u k e Y u d e l l L., U f f o r d D o l o r e s), J. Aeronaut. Sci.,1953, **20**, № 7, 511—512 (англ.)

Описаны методы вычисления и приведены таблицы полной функции Чикала

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-it}\,(x + t - \sqrt{x^2 + t^2})\,\frac{dt}{xt}\,.$$

В таблице приведены значения $F_R(x)$ — вещественной части и $-F_I(x)$ — мнимой части функции Чикала. Так же приведены значения $G(x)$, связанной с функцией $F_R(x)$ соотношением

$$G(x) = F_R(x) - \{1 - \gamma - \log 2x\},$$

где γ — постоянная Эйлера. Значения функций приведены с шестью знаками после запятой для $x = 0\,(0{,}01)\,0{,}1\,(0{,}1)\,4{,}0\,(0{,}2)\,6{,}0\,(0{,}5)\,10{,}0$. Ошибка не превышает 2 и 0,6 единиц последнего знака в $G(x)$ и $F_I(x)$ соответственно. Функция $G(x)$ приведена для интерполирования $F_R(x)$ вблизи начала таблицы. Это интерполирование дает достаточную точность при использовании формулы Лагранжа с пятью точками. Так же можно интерполировать $F_R(x)$ и $F_I(x)$ при $x > 1$.

При $x \geqslant 7$ значения $F_R(x)$ и $F_I(x)$ могут быть вычислены по асимптотическим формулам, которые приведены в статье. *К. Е. Чернин*

4600. Таблицы эллиптической функции Якоби $\varphi = \mathrm{am}\left(\frac{m}{n}K\right)$. Г л о в а ц к и й (Tafel der Jacobischen elliptischen Funktion $\varphi = \mathrm{am}\left(\frac{m}{n}K\right)$. G l o w a t z k i E r n s t), Abhandl. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1953, № 61, 1—27 (нем.)

Даны таблицы значений эллиптической функции Якоби $\varphi = \mathrm{am}\left(\frac{m}{n}K, \theta\right)$ в градусах, с 3 десятичными знаками для $n = 2(1)12$, $m = 1(1)\,n - 1$, и $\theta = 0\,(1)\,90$, полученные интерполяцией по таблицам эллиптических интегралов Лежандра и проверенные по смитсоновским таблицам эллиптических функций Дж. Спенсли и Р. Спенсли (Spenceley G. W., Spenceley R. M., Smithsonian elliptic functions tables, Washington, 1947). *К. С.*

4601. Сообщение хранилища неопубликованных таблиц Королевского общества (Royal Society's depository of unpublished mathematical tables), Nature, 1953, **171**, № 4365, 1140 (англ.)

Сообщается, что в хранилище Королевского общества имеются следующие неопубликованные таблицы: таблицы чисел N^4+1 для $3000<N\leqslant 6000$; таблицы решения уравнения $(y'')^2=yy'$ и двух других уравнений; справочник преобразований Лапласа; таблицы интегралов Френеля; таблицы интеграла вероятностей в комплексной области; таблицы решений сравнений $x^4+1\equiv 0 \pmod p$, $600\,000<p<800\,000$; таблицы дзета-функций Якоби; таблицы биномиальных коэффициентов; таблицы функций влияния; интегралы бесселевых функций (J_0 и Y_0); таблицы интеграла

$$\int_0^{2\pi} J_1^2\left(2k\sin\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\frac{\theta}{2}\,d\theta;$$

таблицы двух функций, встречающихся в теории отражения электромагнитных волн по бесконечному цилиндру; таблицы интеграла, полученного при расчете формы водяной волны; таблицы функций Ланжевена и их обратных величин.

А. В. Лебедев

4602 К. Свойства и таблицы обобщенных ракетных функций, применяемых в теории ракет с постоянным медленным осевым вращением. Россер, Уокер (Properties and tables of generalized rocket functions for use in the theory of rockets with a constant slow spin. Rosser J. Barkley, Walker R. J., V + 114 pp., Cornell University, Ithaca, N. Y., 1953)

При рассмотрении движения во время горения ракеты с постоянным медленным осевым вращением в книге «Математическая теория полета ракеты» (Rosser J. B., Newton R. R., Gross G.L., Mathematical theory of rocket flight, McGraw-Hill, New York, 1947) Россер, Ньютон и Гросс ввели два интеграла, которые там были оценены для некоторых промежутков изменения параметров, встречающихся в них. Эти интегралы теперь вычислены в общем случае. Авторы начинают с решения уравнений движения ракеты с постоянным медленным осевым вращением в зависимости от постоянных, характеризующих стабилизаторы, двигатель и главные оси инерции. Решение содержит различные простые и двойные интегралы колебательного характера.

В трех приложениях эти функции изучаются и выражаются в виде, пригодном для вычисления (например, асимптотические ряды). Исследование ведется, следуя книге Россера (Rosser J. B., Theory and application of $\int_0^z e^{-x^2}dx$ and $\int_0^z e^{-p^2y^2}\,dy\times\int_0^y e^{-x^2}dx$, Mapleton House, Brooklyn, N. Y., 1948).

В таблице Ia функции $\frac{1}{2}\left[\left\{\operatorname{Rr}(x)\right\}^2+\left\{\operatorname{Ri}(x)\right\}^2\right]$ и $\int_0^x \operatorname{Rr}(y)\,dy$ табулированы с пятью десятичными знаками для $x=0{,}0\,(0{,}1)\,5{,}0$. Таблица I содержит значения действительной и мнимой частей функций

$$\operatorname{Rre}(\alpha,x)=\int_x^\infty \operatorname{Rr}(w)\,e^{i\alpha(w-x)}dw,$$

$$\operatorname{Rie}(\alpha,x)=\int_x^\infty \operatorname{Ri}(w)\,e^{i\alpha(w-x)}\,dw$$

с пятью десятичными знаками для $x=0{,}0\,(0{,}1)\,5{,}0$, $\alpha=0{,}1\pi\,(0{,}1\pi)\,8{,}0\pi$. При помощи этих таблиц можно также получить значения для отрицательных α и x. Таблица II дает значения $\operatorname{Rr}(u)$, $\operatorname{Ri}(u)$ и их производных до 3-го порядка с шестью цифрами для $u=0{,}0\,(0{,}1)\,5{,}0$; в таблице III даны некоторые другие вспомогательные функции. Они могут быть употреблены для вычисления функций таблицы I для $x>5$ и больших значений α.

R. A. Rankin

Перевод из Math. Rev., 1954, **15**, № 1, 63.

4603 К. Таблицы нормальных вероятностных функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\quad\text{и}\quad\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\,d\alpha$$

(Tables of normal probability functions

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\quad\text{and}\quad\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-x}^{x}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\,d\alpha,$$

IX + 344 pp., National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series № 23, Washington, U. S. Government Printing Office, 1953, 2.75 doll.)

Переиздание некоторого количества таблиц, впервые опубликованных в 1942 г. (см. Math. Rev., 1943, 4, № 1, 19) и вышедших вторым изданием в 1948 г. (Nat. Bureau of Stand., MT 14).

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 11, 1125.

4604 К. Таблицы функции Эйлера и родственных ей. Жичковский (Tablice funkcji Eulera i pokrewnych. Zyczkowski Michał, PWN, 1954, 6.80 zł.), Zapowied. wydawn., 1954, **3**, № 1, 4 (библ.)

4605 К. Картографические таблицы. Эллипсоид Красовского. 2-е перераб. и доп. изд., 137 стр., Геодезиздат, М., 1953, 14 руб., Тр. Центр. н.-и. ин-та геодезии, аэросъемки и картографии, вып. 97

4606 РЕЦ. Таблицы логарифмов. Пятизначные таблицы логарифмов и тригонометрических функций для десятичного деления окружности (на 400 градов). Койцш (Logarithmentafeln. Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln der zentesimalen (400g—) Teilung. Koitzsch R., 168 S., VEB Verlag Technik, 1953, 13 DM) [**Рецензия: Цаппе** (Zappe A.), Technik, 1953, **8**, № 11, 771 (нем.)]

4607 РЕЦ. Графические таблицы для оценки статистических величин. Коллер (Graphische Tafeln zur Beurteilung statistischer Zahlen. Koller Siegfried, 3. Aufl., VIII + 73 S., Verlag Dr. Dietrich Steinkopff, Darmstadt, 1953, 18 DM) [**Рецензия: Гепперт** (Geppert M. P.), Z. Naturforsch., 1953, **8b**, № 12, 780 (нем.)]

См. также: 4347, 4428, 4431, 4433, 4435, 4438, 4505, 4511, 4669 II

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

4608. Машинные средства для кодирования. Айзак (Machine aids to coding. Isaac Earl J.), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952, September, 1953, 17—19 (англ.)

Затрагивается проблема автоматизации процесса перевода алгебраической формы записи задачи на машинный язык. По мнению автора, автоматизация целесообразна ввиду громоздкости самого процесса перевода для большинства задач и неизбежности канцелярских ошибок в случае выполнения его вручную.

Перевод может быть расчленен на две стадии: 1) перевод структуры и 2) перевод команд. Перевод структуры представляет собой переход от алгебраической формы записи задачи к последовательности отдельных команд, каждая из которых входит в число основных операций, выполняемых данной машиной. После выполнения перевода структуры задача записана в машинной грамматике, но для команд применены произвольные символы. Перевод команд состоит в переходе от произвольных алгебраических символов к машинному коду.

По мнению автора, применение произвольной символики при кодировании вместо номеров машинных ячеек имеет два принципиальных преимущества. Во-первых, произвольная символика позволяет кодирующему применять более обширный перечень команд, чем перечень выполняемых машиной операций, и дает возможность употреблять для переменных мнемонические символы, которые служат в качестве намека на физическую сущность, выражаемую ими. Программу, записываемую таким образом, легко истолковывать как при ее построении, так и при контроле, что особенно существенно. Во-вторых, произвольная символика допускает свободу перегруппировок. При каких-либо изменениях или исправлениях в коде обычно, в целях сохранения блочной структуры программы, применяют переназначение ячеек. Оно не испортит кодировку в произвольной символике, но разрывает машинную кодировку.

Для перевода кодов при подготовке программ для машины СЕАК Национального бюро стандартов применяется сортировка ИБМ и репродуктор. Дается схематическое описание их работы. При их помощи символы элементарных функций сначала развертываются в последовательность операций, допускаемых машиной, а затем каждая отдельная команда записывается в машинном коде.

Р. И. Подловченко

4609. Вычислительная машина помогает проверять программу. Дим (Computer aids to code checking. Diehm Ira C.), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952, September, 1953, 19—21 (англ.)

Описываются устройства и программы, позволяющие использовать вычислительную машину для контроля правильности кодов испытываемой программы. В частности, в машине СЕАК (SEAC) существует устройство «Автомонитор», которое может печатать любую команду и полученный при ее выполнении результат в ходе решения задачи. Излагается ряд общих соображений об организации контроля такого рода и сообщается, что на машине СЕАК каждую неделю несколько часов отводится специально на контроль правильности кодирования, причем на отыскание одной ошибки тратится в среднем 10 мин. машинного времени. Сообщается о работе Вегстейна (J. H. Wegstein) из Вычислительной лаборатории Национального бюро стандартов США (NBS Computation Laboratory), который разработал программу для выявления ошибок нескольких разных типов; эта программа не мешает нормальному ходу операций, выполняемых по основной программе.

Перечисляется ряд программ, используемых на машине СЕАК. Среди них программа, которая передает содержание запоминающего устройства (з. у.) на магнитную ленту (ею пользуются, чтобы избежать повторения правильных вычислений); программа, сравнивающая вводимые данные с содержанием ячеек з. у. Описывается программа, регистрирующая все операции, производимые с данной ячейкой з. у. В каждый момент, когда некоторая команда воздействует на данную ячейку з. у., адрес команды и результат действия печатаются.

Описываются также программы, определяющие путь, по которому прошло управление, и программы, которые определяют общий результат действия каждого из нескольких выбранных участков испытываемой программы, далее повторяющие эти участки и сравнивающие полученные результаты.

В замечании Хасбрука (B. Hasbrouck) к данной статье описывается программа, которую используют программисты фирмы «Эккерт-Мочли» (Eckert-Mauchly Division) для обнаружения одного класса ошибок программирования в адресной части команд. Программа печатает все команды, содержащие некоторый заданный адрес. *Л. Н. Королев*

4610. Композиция программ. Риджуэй (Compiling routines. Ridgway Richard K.), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952, September, 1953, 1—5 (англ.)

Для сокращения времени программирования рекомендуется специальная подпрограмма «составитель», заставляющая счетную машину выбирать из библиотеки нужные подпрограммы, составлять из них полную программу и выдавать результат в виде ленты, которая может быть использована для ввода полной программы в машину. Приводятся данные о сокращении времени на полное решение задачи при таком методе программирования для одного частного случая (РЖМат, 1954, 1838).

Н. П. Жидков

4611. Программное управление электронной вычислительной машиной. Хармут (Programmsteuerung einer elektronischen Rechenmaschine. Harmuth Henning), Acta phys. austriaca, 1953, **7**, № 4, 390—401 (нем.)

Излагается основная идея программного управляющего устройства электронной вычислительной машины для статистических вычислений, разработанной в Институте низкочастотной техники Венского высшего технического училища. Машина с описываемым программным управляющим устройством является аналогом известной доски Гальтона; вместо шаров в машине используются электри-

ческие импульсы, а вместо штифтов доски Гальтона — ячейки запоминающего устройства.

Большая часть статьи посвящена рассмотрению вопроса о моделировании посредством специальной программы на машине такого типа различных статистических схем (схемы Бернулли, Больцмана, Бозе и Ферми). В статье приведена блок-схема вычислительной машины, в которой используется рассматриваемое программное управляющее устройство и имеется ссылка на предыдущую статью автора, в которой описана сама машина (Harmuth H., Eletrotechnik und Maschinenbau, 1952, № 22, № 23).

В. И. Шестаков

4612. Об основах программы для играющей в шахматы вычислительной машины. Ш л и б с (Über die Grundzüge eines Programms für eine schachspielende Rechenmaschine. S c h l i e b s G.), Funk und Ton, 1953, **7**, № 5, 257—265 (нем.)

Разбирается вопрос об использовании быстродействующих автоматических вычислительных машин для игры в шахматы. Легко составить программу, которая даст машине полные сведения о позиции (положение фигур, очередность хода, возможность взятия на проходе и т. д.) и позволит выбирать ходы, возможные по правилам игры. Задача состоит в том, чтобы выбрать хотя бы относительно хорошие ходы. Основой такого выбора является программа, осуществляющая алгоритм, соответствующий некоторой определенной заранее стратегии. Пусть машина играет белыми. Вводится функция $\varphi(P)$, оценивающая позицию P, например, $\varphi(P) = 200\,(\text{Кр} - \text{К}'\text{р}) + 9\,(\Ф - \Ф') + 5\,(\text{Л} - \text{Л}') + 3\,(\text{С} - \text{С}' + \text{К} - \text{К}') + (\П - \П') - 0{,}5\,(\Pi_1 - \Pi_1' + \Pi_2 - \Pi_2' + \Pi_3 - \Pi_3') + 0{,}1\,(\text{М} - \text{М}') + \ldots$, где Кр, Ф, Л, С, К, П, Π_1, Π_2, Π_3 — количество королей, ферзей, ладей, слонов, коней, пешек, отсталых пешек, изолированных пешек, сдвоенных пешек (без штриха — у белых, со штрихом — у черных), М и М′ — чисто позиционные преимущества (подвижность). Эта функция приближенно оценивает выгодность позиции. В позиции P машина подсчитывает на p ходов вперед (p — порядка 3) все без исключения варианты $\alpha_1\beta_1\ \alpha_2\beta_2 \ldots \alpha_p\beta_p$, α_i — ходы белых, β_i — ходы черных, и из них выбирается наиболее благоприятный $\bar{\alpha}_1\bar{\beta}_1 \ldots \bar{\alpha}_p\bar{\beta}_p$, т. е. тот, для которого

$$\varphi(P\bar{\alpha}_1\bar{\beta}_1 \ldots \bar{\alpha}_p\bar{\beta}_p) =$$

$$= \max_{\alpha_1}(\min_{\beta_1}(\ldots(\max_{\alpha_p}(\min_{\beta_p}(P\alpha_1 \ldots \beta_p)\ldots),$$

$P\alpha_1 \ldots \beta_p$ — позиция, получающаяся из P путем ходов $\alpha_1 \ldots \beta_p$. Ход $\bar{\alpha}_1$ является искомым «хорошим» ходом. Эта «элементарная» стратегия может быть усовершенствована до «улучшенной». По этой «улучшенной» стратегии по окончании p-го хода производится проверка, является ли получающаяся позиция устойчивой, т. е. нет ли в ней возможности взятия менее ценной фигурой фигуры более ценной, не находится ли король под шахом и т. д. Если позиция не является устойчивой, вариант просчитывается до получения устойчивой позиции. Подавляющее число вариантов вообще совершенно не заслуживает рассмотрения (и человек, играя в шахматы, опускает их из общих соображений). Для того чтобы отсеять значительное число этих вариантов, машина рассматривает лишь «сильные» ходы противника. Шкала силы может быть примерно такова: шах, взятие, нападение, развитие, защита и т. д. Такой совокупностью четких правил определяется алгоритм нахождения «лучшего» хода, и тем самым машина получает возможность играть по составленной программе в шахматы (конечно, далеко не сильнейшим образом). Меняя вид функций, управляющих оценкой и выбором ходов, можно менять «стиль игры» машины.

В статье не приведено никаких указаний об использовании на практике этого алгоритма. Указывается, что на основе всех этих соображений разрабатывается большой счетный автомат для игры в шахматы. Общие идеи использования вычислительных машин для игры в шахматы излагались ранее (см., например, работу Shannon Cl. E., Philos. Mag., сер. 7, **41**, 256), однако менее конкретно.

А. А. Абрамов

4613. Применение элементов булевой алгебры для изучения сигналообразующих и передающих систем. С е р р е л л (Elements of Boolean algebra for the study of information-handling systems. S e r r e l l R o b e r t), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 10, 1366—1380 (англ.)

Излагаются элементы булевой алгебры в применении к системам, передающим и преобразующим сигналы. Избегая пользоваться терминологией математической логики, автор излагает булеву алгебру преимущественно в терминах и обозначениях алгебры множеств и вводит при этом несколько новых терминов. Некоторые из этих терминов эквивалентны существующим уже терминам алгебры логики. Большинство доказанных в статье теорем является лишь перефразировкой уже известных теорем булевой алгебры. Из других теорем важнейшей является теорема XIII, утверждающая, что число «логических» элементов, необходимых для осуществления любой булевой функции n независимых переменных, не превышает $(n+1)\,2^{n-1}$.

Значительная часть статьи посвящена проблеме минимизации числа физических элементов, требуемых для осуществления систем, оперирующих с дискретными сигналами, однако эта проблема рассматривается не в полном объеме: речь идет только о такой минимизации, которая осуществляется только посредством приведения выражений булевых функций к эквивалентным простейшим «элементарным функциям», т. е. функциям, являющимся либо объединениями пересечений, либо пересечениями объединений аргументов и дополнений аргументов этих функций.

В конце статьи приведено несколько примеров применения булевой алгебры для синтеза, анализа и упрощения вычислительных схем. В первом примере рассматривается синтез блок-схемы двоичного сумматора. Во втором примере проводится анализ известной блок-схемы двоичного сумматора, каждый разряд которого построен из двух полусумматоров. В третьем примере рассматривается вопрос об упрощении суммирующих схем. В результате этого рассмотрения автор приходит к заключению, что двоичный электронно-ламповый сумматор может быть построен с 12 управляющими сетками в каждом разряде сумматора.

Главной целью работы является, по словам автора, представление адекватного математического

базиса для применения булевой алгебры к изучению систем, оперирующих с дискретными сигналами. В соответствии с этой целью большое внимание уделяется обозначениям операций и вообще вопросам изложения теории. Систематически используется принцип двойственности. Чтение статьи затрудняется наличием опечаток как в тексте, так и в формулах.

В. И. Шестаков

4614. Символический синтез цифровых вычислительных машин. Рид (Symbolic synthesis of digital computers. Reed Irving S.), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952, September, 1953, 90—94 (англ.)

Излагается метод синтеза двоичных цифровых вычислительных машин, состояния всех элементарных ячеек которых изменяются только в дискретные моменты времени. Такие машины автор называет синхронными булевыми машинами.

Состояние каждой ячейки в каждый данный момент времени описывается некоторой функцией $A(t)$, сохраняющей одно из двух значений 0 или 1 в интервале $n\tau \leqslant t < (n+1)\tau$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$

Поведение синхронной булевой машины описывается системой булевых функций (синхронной булевой системой):

$$A_j(t+\tau) = f_j(A_1(t), \ldots, A_N(t), W_1(t), \ldots, W_M(t)) \quad (j = 1, 2, \ldots, N) \qquad (1)$$

и начальными значениями $A_1(0), \ldots, A_N(0)$, где $W_1(t), \ldots, W_M(t)$ — заданные входящие или действующие на эту машину функции такого же типа, как функции $A(t)$.

Представляя функцию f_j в нормальной дизъюнктивной форме

$$f_j = g_j A_j' + {}_0g_j' A_j, \qquad (2)$$

где

$$g_j = f_j(A_1, \ldots, A_{j-1}, 0, A_{j+1}, \ldots, A_N, W_1, \ldots, W_M),$$

$${}_0g_j' = f_j(A_1, \ldots, A_{j-1}, 1, A_{j+1}, \ldots, A_N, W_1, \ldots, W_M),$$

и используя свойства операции $\oplus$, определяемой через операции булевого сложения $+$ и дополнения $'$ посредством формулы

$$F \oplus G = F'G + FG',$$

преобразуют систему (1) к виду

$$\Delta A_j = g_j A' + {}_0g_j' A_j = a_j \quad (j = 1, 2, \ldots, N), \qquad (3)$$

где оператор Δ, называемый здесь оператором изменения (change operator), определяется для всякого $t \geqslant 0$ равенством $\Delta F(t) = F(t+\tau) \oplus F(t)$.

Такое преобразование системы (1) в эквивалентную ей систему (3) оправдывается тем, что основными элементами синхронных булевых машин являются триггеры с одним входом, и функция a_j является, как показано далее, булевой функцией функций A_j, подаваемой на вход триггера.

Действительно, как показано в статье, напряжение на выходе триггера, на вход которого подано напряжение $a(t)$, удовлетворяет уравнению

$$A(t+\tau) = A(t) \oplus a(t), \qquad (4)$$

решая которое относительно $a(t)$, получим

$$a(t) = A(t+\tau) \oplus A(t) = \Delta A(t). \qquad (5)$$

После краткого обсуждения физического смысла уравнений (3) и (5) автор формулирует свои выводы в виде теоремы 2.

Каждая синхронная булевая система представима посредством некоторой синхронной булевой машины, содержащей только синхронизированные триггеры с одним входом и устройства для получения сумм и произведений выходных напряжений триггеров. Справедливо и обратное утверждение.

В конце статьи в качестве примера синхронной булевой машины рассмотрен синтез одного необычного типа трехразрядного двоичного счетчика по заданной таблице, содержащей значения функций $A_1(t)$, $A_2(t)$ и $A_3(t)$ в моменты t и $t+\tau$. Имеются ссылки на более ранние неопубликованные работы автора. Более подробное обсуждение вопросов синтеза цифровых вычислительных машин автор откладывает до последующих публикаций.

Замечены следующие опечатки: в формуле (5) в тексте статьи вместо g_1 должно быть g_j; на стр. 93, строка 7, третье слагаемое $A_3'A_2'A_1'$ в выражении ΔA_1 должно быть написано так: $A_3'A_2'A_1$.

В. И. Шестаков

4615. Эффективность двойного сглаживания на управляющей цифровой вычислительной машине. Сперо (Effectiveness of two-step smoothing in digital control computers. Spero Robert E.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 10, 1465—1469 (англ.)

Цифровая вычислительная машина как элемент некоторого управляющего устройства может иметь одной из своих функций сглаживание числовых результатов наблюдения, содержащих случайные шумы. Сглаживание заключается в образовании взвешенных средних входных данных. Эффективность сглаживания зависит от числа данных, используемых для образования среднего, т. е. от произведения nT, где n — число данных, воспринимаемых в 1 сек., и T — время сглаживания. Однако добиться одновременного увеличения и n и T за одно сглаживание часто бывает затруднительно. В связи с этим автор предлагает производить двойное сглаживание последовательно, причем 1-е сглаживание характеризуется большой скоростью поступления данных n_1 и малым временем сглаживания T_1, а 2-е, наоборот,— малой скоростью поступления данных n_2 и большим временем сглаживания T_2. Тогда, если $n_1 \gg n_2$, а n_1T_1 и n_2T_2 примерно равны друг другу, оказывается, что двойное сглаживание приблизительно эквивалентно одинарному с параметрами n_1 и T_2, т. е. с большой скоростью поступления данных и с большим временем сглаживания.

Рассуждения ведутся для трех способов выбора весовых множителей W_η $(\eta = 0, 1, 2, \ldots)$: (1) $W_\eta = 1/M$ для $\eta < M$, $W_\eta = 0$ для $\eta \geqslant M$; (2) $W_\eta = Ae^{-\alpha\eta}$; (3) $W_\eta = A_1e^{-\alpha_1\eta} + A_2e^{-\alpha_2\eta}$ (A_1 и A_2, α_1 и α_2 — попарно сопряженные комплексные

числа). Приводятся результаты численного примера, подтверждающие теоретические выводы.
А. П. Ершов

4616. Численное решение дифференциального уравнения в частных производных на электронной машине ИБМ-701. Ладд, Шелдон (The numerical solution of a partial differential equation on the IBM type 701 electronic data processing machines. Ladd D. W., Sheldon J. W.), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952, September, 1953, 115—117 (англ.)

Рассматривается решение уравнения Томаса — Ферми — Дирака на машине ИБМ-701, проведенное в августе 1952 г. для двухатомной молекулы азота. Уравнение решалось методом итераций. В качестве узлов сетки были выбраны точки пересечения 60 квазилемнискат с 15 кривыми, ортогональными к ним — всего 900 узлов. Приводятся расчетные формулы и порядок вычислений. В вычислениях участвовали как быстродействующая память, так и магнитная — барабаны и ленты. На одну итерацию (включая проверку) потребовалось 87 сек. Дается распределение этого времени на различные виды операций: считывание с барабанов и лент, запись на них и т. д. Непосредственно вычисления в одной итерации занимают 60,2 сек.

За одну итерацию выполняется примерно 908 000 команд (исключая печать). Если исключить команды записи и считывания, то на вычисление приходится 814 000 команд, что дает среднее время на выполнение одной команды 74 μсек.

Приводится таблица распределения команд на различные операции для одной квазилемнискаты. Указывается, что задача требует 60—80 итераций, что дает по крайней мере 5 значащих цифр в результате.
Н. П. Трифонов

4617. Проект электронной счетной машины Института прикладной математики Высшей технической школы. Шпейзер (Projekt einer elektronischen Rechenmaschine am Institut für angewandte Mathematik der ETH. Speiser A. P.), Z. angew. Math. und Phys., 1953, **4**, № 4, 317—318 (нем.)

В Институте прикладной математики Высшей технической школы в Цюрихе проектируется электронная вычислительная машина, работающая по десятичной системе счисления. Машина будет оперировать с числами в пределах $\pm a \cdot 10^{\pm b}$, где a — одиннадцатиразрядное, а b — двухразрядное десятичное число. Запоминающее устройство машины проектируется в виде магнитного барабана, обладающего емкостью в 10 000 чисел и команд. Время умножения и сложения составит соответственно 20 и 5 мсек. без учета времени считывания с запоминающего устройства. Время, затрачиваемое на обращение матрицы десятого порядка, составит 2,5 мин.

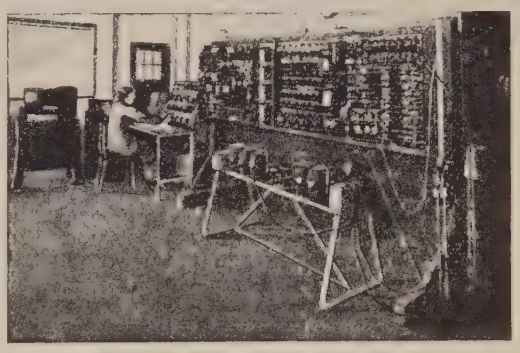
Полностью законченная машина будет содержать приблизительно 1200 ламп, 2000 полупроводниковых диодов и 300 реле.
Н. И. Бродович

4618. Фирма ИБМ присоединяет к существующим новую вычислительную машину (IBM adds new computer to line), Aviat. Week, 1953, **59**, № 16, 70 (англ.)

Краткое сообщение о том, что фирма ИБМ объявила о выпуске новой десятичной электронной вычислительной машины, которая должна заполнить разрыв между большой цифровой машиной ИБМ-701 и вычислительной машиной ИБМ с программированием на перфокартах (Card programmed calculator). Новая машина носит обозначение ИБМ-650 и называется «вычислительная машина с магнитным барабаном» (Magnetic drum calculator). Машина имеет запоминающее устройство на 20 000 знаков и выполняет сложение двух десятичных чисел со скоростью 200 операций в 1 сек. и умножение со скоростью 100 операций в 1 сек. Управление от магнитного запоминающего устройства с перфокарт или с пульта оператора.
Д. П.

4619. Автоматическая вычислительная машина АКЕ (Automatic Computing Engine — ACE), Mach. Lloyd. Europ. Ed., 1953, **25**, № 23A, 83 (англ.)

Заметка общего характера об английской вычислительной машине АКЕ (ACE) (РЖМат, 1954, 2408, 2416, 2752, 3096). Приведена фотография машины (см. фото).



К реф. 4619

4620. Лабораторная вычислительная машина (Laboratory computer service), India Rubber World, 1953, **123**, № 6, 792 (англ.)

Сообщение фирмы «Берроус» (Burroughs Corp.) о выпуске электронной вычислительной машины, имеющей запоминающее устройство на магнитном барабане и систему ввода и вывода данных на перфоленте. В машине предусмотрена система контроля, способствующая устранению ошибок.
М. П. Сычева

4621. Восьмитонная вычислительная машина (An eight-ton electronic computer), Telecommuns Repts, 1953, **19**, № 50, 20 (англ.)

Большая вычислительная машина фирмы «Компьютер Рисёрч Корпорейшн» (Computer Research Corp.) установлена в авиационном бюро Военно-морского флота в Департаменте обороны в Вашингтоне (США). Указывается, что машина весит 8 *т* и является одной из крупнейших в мире.
Н. Я. Матюхин

4622. Цифровая вычислительная машина (Digital computer...), Tech. Engng News, 1953, **34**, № 6, 12 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 1842—1848.

4623. Совещание по автоматическим цифровым машинам (Symposium on automatic digital computation), Ricerca scient., 1953, **23**, № 7, 1248—1259 (итал.)

Отчет Финетти, Родино и Кица (Finetti B. de, Rodinó G., Kitz N.) — трех итальянских участников совещания по автоматическим цифровым машинам, проводившегося Национальной физической лабораторией в Теддингтоне (Лондон) 23—28 марта 1953 г. Отчет написан под углом зрения возможности использования английского опыта для построения электронной машины в Италии. Особо отмечается существенная роль университетских лабораторий.

При перечислении вопросов, обсуждавшихся на совещании, указывается на большую актуальность задачи оптимального программирования. Из технических новинок отмечается запоминающее устройство на магнитострикционных линиях задержки фирмы «Эллиотт».

В заключение дается краткий обзор существующих и строящихся в Англии машин: АКЕ (РЖМат, 1954, 2408, 2752), «ЭЛЛИОТТ-401» (РЖМат, 1953, 1435) и ряда других (DEUCE, MOSAIC, EDSAC, LEO, NICHOLAS, MADAM, машина Кука атомной лаборатории в Харвелле). *К. А. Семендяев*

4624. Применение цифровой вычислительной техники в физике. Брукер (Application of digital computing techniques to physics. Brooker R. A.), Brit. J. Appl. Phys., 1953, **4**, № 11, 321—326 (англ.)

Отмечая, что после войны построены или близки к завершению ряд электронных машин, автор ставит вопрос о путях, которыми эти машины могут помочь физикам. Прежде чем программировать задачу, следует сформулировать ее математически и выбрать метод численного решения, поэтому автор предлагает классифицировать задачи с математической точки зрения, а не по их физическому происхождению. Рассматриваются задачи, включающие действия с матрицами, и анализируются методы решения этих задач на машинах с фиксированной запятой и с учетом порядков; решение линейных эллиптических уравнений; применение электронных машин в кристаллографии для суммирования двумерных и трехмерных рядов Фурье, для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Приводятся примеры и обсуждаются желательные свойства машины, в частности ее запоминающего устройства. Обсуждаются вопросы подготовки обслуживающего персонала машин и организация его работы.

Библиография 21 название. *Н. П. Трифонов*

4625. Коэффициенты влияния для консолей, вычисленные на СЕАК. Шоу, Ван (Influence coefficients of tapered cantilever beams computed on SEAC. Shaw F. S., Wan C. C.), J. Appl. Mech., 1953, **20**, № 3, 443—444 (англ.)

Обсуждение статьи Леви (Samuel Levy), указанной в заглавии (РЖМат, 1954, 3120).

4626. Библиография по кодированию. Уилер (Bibliography of coding procedure. Wheeler D. J.), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, **7**, № 43, 195—197 (англ.)

Второй список (см. РЖМат, 1954, 3113), в котором перечислено 12 названий материалов по программированию и кодированию, из которых 2 относятся к машине УНИВАК, 3 — к машине «Вихрь I» (Whirlwind I), 4 — к машине СЕАК и по одному — к машинам МИДАК и СВАК. Только в трех случаях, кроме названия, имеется краткая аннотация. *К. А. Семендяев*

4627. Электронные вычислительные машины. Брейжер (Electronic calculating machines. Brazier L. G.), Engineer, 1953, **196**, № 5103, 637—638 (англ.)

Речь на собрании секции Института инженеров-электриков 28 октября 1953 г. *К. С.*

4628. Британская ассоциация.— Вычислительные машины (British Association.— Calculating machines), Electr. Rev., 1953, **153**, № 12, 631 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 3129—3131.

4629. Машина воспроизводит себя при помощи электронного вычислительного устройства (Machine reproduces itself by using «Brain»), Sci. News Letter, 1953, **63**, № 17, 262 (англ.)

Краткое сообщение о выступлении Клода Шеннона (Claude E. Shannon) на юбилейном собрании технологического института в Кливленде, в котором он сообщил, что разработана абстрактная математическая модель машины, изготовляющей другую подобную ей машину.

Такая машина должна собирать части, из которых построена сама, и строить из них вторую машину такого же типа, которая, в свою очередь, начнет сборку третьей машины и т. д. Это может продолжаться до тех пор, пока хватит частей.

4630. Моделирующее устройство (Analogue computer), Electr. Rev., 1953, **153**, № 25, 1384 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 3495.

4631. Новая электронная счетная машина (A new electronic computor), Flight, 1953, **64**, № 2331, 2 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 3495.

4632. Магнитный усилитель, управляемый полупроводниковым триодом. Спенсер (Transistor-controlled magnetic amplifier. Spencer Richard H.), Electronics, 1953, **26**, № 8, 136—140 (англ.)

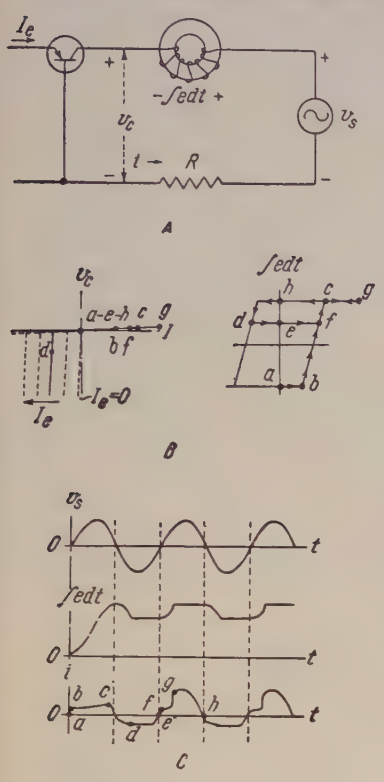
Проводится анализ работы последовательной цепочки, состоящей из обмотки на магнитном сердечнике, сопротивления и источника переменного тока, и анализ работы той же цепи с детектором или полупроводниковым триодом.

Приведена схема, током в цепи которой можно управлять, изменяя сопротивление, шунтирующее детектор. Величина тока определяет рабочую точку, в которой остается сердечник после отрицательного полупериода напряжения. Работа цепи во время положительного полупериода напряжения полностью определяется состоянием сердечника, в котором он остался после отрицательного полупериода напряжения. Используя вместо детектора полупроводниковый триод, можно легко управлять обратным током и, таким образом, выбрать рабочую точку на характеристике сердечника.

На фиг. *А* приведена схема, в которой использован полупроводниковый триод. Во время положи-

тельного полупериода полупроводниковый триод обладает очень малым сопротивлением.

В начале положительного полупериода при небольшом приращении напряжения рабочая точка перемещается (фиг. *B*) от точки *a* к точке *b*. При дальнейшем увеличении положительного приращения напряжения происходит резкое изменение магнитного потока ($\int edt$) через сердечник и соответствующее возрастание тока в цепи. Рабочая точка перемещается в точку *c*.



К реф. 4632

При отрицательном полупериоде питающего напряжения триод имеет низкое сопротивление до тех пор, пока рабочая точка по его характеристике не переместится до излома, после этого его сопротивление резко возрастет (фиг. *B*).

После окончания отрицательного полупериода состояние магнитного сердечника характеризуется точкой *e* и прибор готов к работе в течение следующего положительного полупериода. Во время этого положительного полупериода рабочая точка магнитного элемента перемещается от *e* к *f*, затем к *c*. После достижения точки *g*, т. е. достижения насыщения сердечником, практически все напряжение источника тока выделяется на нагрузочном сопротивлении.

Кривые напряжений и состояний сердечника, соответствующие описанной работе, приведены на фиг. *C*. *А. Н. Мямлин*

4633. Лаборатория фирмы «Белл» разрабатывает кремниевый диод (Bell Labs develops silicon junction diode), Tele-Tech, 1953, **12**, № 9, 11 (англ.)

Краткое сообщение о разработке лабораторией «Белл» кремниевого диода, имеющего соотношение между обратным и прямым сопротивлением 100 000 000 : 1 и обратный ток утечки приблизительно 0,0001 μa. Предполагается использовать этот диод в телефонном коммутационном оборудовании и в счетных машинах, в частности в запоминающих устройствах счетных машин, построенных на полупроводниковых триодах. Приведена фотография. *Н. Б.*

4634. Кремниевый диод (Silicon alloy junction diode), Railway Signaling and Communs, 1953, **46**, № 9, 642 (англ.)

См. реф. 4633.

4635. Быстродействующий ключ помогает запоминающему устройству электронной счетной машины (Fast-flipping switch helps «brain» memory), Sci. News Letter, 1953, **64**, № 6, 93 (англ.)

Краткое сообщение о применении кремниевых диодов в электронных счетных машинах в качестве коммутирующих элементов запоминающих устройств, построенных на диодах и конденсаторах.

См. реф. 4633, 4634. *Н. Б.*

4636. Диод, который может быть использован в запоминающем устройстве (Diode to be used in memory organ), Wire and Radio Communs, 1953, № 8, 34 (англ.)

См. реф. 4633, 4634, 4635.

4637. Запаянные германиевые диоды (Sealed germanium diodes), Instruments, 1953, **26**, № 9, 1351—1352 (англ.)

Краткое сообщение фирмы «Хьюз» (Hughes Aircraft Co.) о выпуске в продажу 17 типов герметически запаянных германиевых диодов. Приведена фотография. *Н. Б.*

4638. Полупроводниковые триоды (Transistors), Electr. Manufact., 1953, **52**, № 1, 154 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 2428.

4639. Полупроводниковый триод (The transistor), Mechanics, 1953, **55**, № 7, 119—120 (англ.)

Популярная статья о полупроводниковых триодах. Отмечаются возможности применения полупроводниковых триодов в электронных счетных машинах и в технике связи. *Н. Б.*

4640. Полупроводниковый триод произвел революцию в электронике (Rivoluzione nell'elettronica col «transistor»), Tecn. ital., 1953, **8**, № 5, 192—193 (итал.)

Краткая популярная статья о полупроводниковых триодах.

4641. Полупроводниковые триоды. Теория и применение в электронике (Transistoren. Teori og anvendelse i elektronikken), Tekn. og fys., 1953, № 4—5, 162—164 (норв.)

Краткое популярное описание физических процессов в полупроводниковом триоде.

4642. Полупроводниковые электронные приборы (Transistori), Radio rivista, 1953, **6**, № 7, 266—268 (итал.)

Краткое изложение физических процессов в полупроводниках.

4643. Полупроводниковые триоды. Принцип двойственности. Роддам (Transistors. The principle of duality. Roddam Thomas), Wireless World, 1953, **59**, № 8, 359—360 (англ.)

4644. Германий. Томпсон, Масгрейв (Germanium. Thompson A. B., Musgrave J. R.), Austral. Machinery, 1953, **6**, № 59, 39—40 (англ.)

4645. Магнитный запоминающий элемент (Magnetisch geheugen-element), Electronica, 1953, **6**, № 136, 189 (голл.)

На дюссельдорфской радиовыставке фирмой «Штемаг» (Stemag) выставлен в качестве запоминающего элемента для электронных вычислительных машин кольцевой сердечник, изготовленный из материала «Кераперм» (Keraperm), у которого кривая гистерезиса имеет прямоугольную форму.

4646. **Новый метод сборки магнитных записывающих головок. Мерри** (A new method of assembling magnetic recording heads. Merry I. W.), Electronic Engng, 1953, **25**, № 305, 312 (англ.)

Предлагается склеивать две половинки тороидальных магнитных головок. Кроме скрепления двух частей головки, склеивающий материал создает немагнитные зазоры необходимой величины.

Указанный способ рекомендуется применять при изготовлении магнитных головок из ферритов.

В. В. Бардиж

4647. **Быстродействующее электронное запоминающее устройство помогает при решении сложных проблем** (High-speed electronic memory device seen as aid in solving complex problems), Electr. Engng, 1953, **72**, № 10, 943 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 2754.

4648. **Новое запоминающее устройство** (A new memory device), Radio-Electronics, 1953, **24**, № 10, 22 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 2754.

4649. **Применение преобразования Лапласа и механического гармонического синтезатора к анализу электрических цепей. Шуэтман, Браун** (The application of the Laplace transformation and a mechanical harmonic synthesizer in the analysis of electric circuits. Schwetman Herbert D., Brown S. Leroy), Rev. Scient. Instrum., 953, **24**, № 5, 375—379 (англ.)

Описывается гармонический синтезатор (Brown S. Leroy, J. Franklin Inst., 1939, 228, № 6, 675—694), который механически воспроизводит на плоскости комплексного переменного w образ окружности $r = \text{const}$ при отображении $w = \sum_0^n c_k r^k e^{ki\varphi}$ $(n \leqslant 15)$, причем для каждой точки w прибор показывает соответствующее значение φ. Это дает возможность использовать прибор для приближенного нахождения всех корней многочлена (степени $\leqslant 15$). Приводится несколько примеров простых электрических цепей, для которых операторные токи разлагаются на простые дроби после определения корней знаменателя на указанном приборе, и находятся их временные выражения. *В. И. Левин*

4650. **Планиметр корня квадратного** (Square root planimeter), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 6, 478 (англ.)

Сообщение фирмы «Либраскоп» (Librascope Inc.) о выпуске интегриметра корня квадратного, предназначенного для обработки графиков, нанесенных самописцами на 3-дюймовые перфорированные ленты. Перемещение ленты производится от мотора. Интегрирование проводится в направлении перемещения ленты от ее начальной кромки до соответствующего ее положения. Точность 4 цифры.

Л. Е. Садовский

4651. **Быстродействующий электро-механический интегратор** (High speed response in electro-mechanical integrator), Prod. Engng, 1953, **24**, № 6, 240 (англ.)

Сообщаются дополнительные сведения об электромеханическом интеграторе фирмы «Инстрон» (РЖМат, 1953, 494). Скорость вращения сервомотора интегратора является линейной функцией входного напряжения. Управление сервомотором осуществляется через усилитель мощности при помощи разности входного напряжения и напряжения специального тахометра, вращаемого сервомотором. Для компенсации ошибок при резком изменении входного сигнала в усилителе предусмотрена специальная схема. Предусмотрена регулировка масштаба интегрируемых величин и регулировка нулевой точки. Счетчики интегратора могут накапливать как положительные, так и отрицательные величины со скоростью до 5000 измеряемых единиц в 1 мин. Интегратор может быть приспособлен для интегрирования переменной величины y по x, если y и x представлены в виде углов поворотов. При этом потребуются дополнительный тахометр и потенциометр. Тахометр преобразует угол поворота x в напряжение, пропорциональное dx/dt, где t — время. При помощи потенциометра получается напряжение, пропорциональное $y \cdot dx/dt$, которое интегрируется интегратором:

$$\int \left[y \frac{dx}{dt} \right] dt = \int y dx.$$

Приводится схема интегратора. *Е. А. Волков*

4652. **Интеграторы. Фрёйденталь** (Integratoren. Freudenthal H.), Simon Stevin, 1951—1952, **29**, № 4, 177—184 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (голл.)

Краткое популярное описание наиболее употребительных планиметров и интегриметров. Основная теорема теории планиметров пояснена лишь чертежом, но не доказана. Ссылки на общеизвестную литературу (книги Галле (1912), Мейер-пур-Капеллен (1949), Мэррэй (1947) и Хартри (1950)).

Б. Н. Делоне

4653. **Миниатюрная счетная машина Курта модель II** (Curta Model II pocket calculating machine), Machinery (London), 1954, **84**, № 2146, 20 (англ.)

См. РЖМат, 1953, 492.

4654. **Об определении выработки операторов на вычислительных машинах. Абаннин А.**, Бухгалт. учет, 1953, № 12, 34—36

4655. **Чертежная машина для построения аксонометрических изображений** (Drafting machine produces all axonometric views), Prod. Engng, 1953, **24**, № 8, 218—219 (англ.)

Описан простой и удобный прибор для построения аксонометрических изображений по заданным ортогональным чертежам. Прибор состоит из двух рычагов, скрепленных между собой шарниром и движущихся поступательно по направляющей рейке. На одном рычаге укреплен обводной штифт,

на другом — карандаш. Обоснование сводится к рассмотрению подобия треугольников, образованных рычагами прибора.

Описаны правила расположения чертежей на доске и приводится формула для определения положения карандаша и обводного штифта при заданных показателях искажения. *С. А. Смирнов*

4656. Прибор для расчета радиографической экспозиции (B. S. C. R. A. radiographic exposure calculator), Foundry Trade J., 1953, 95, № 1933, 370 (англ.)

Британская исследовательская ассоциация по стальному литью (B. S. C. R. A.) разработала и выпускает прибор, упрощающий расчет экспозиции при радиографии стального литья и других материалов при помощи радиоактивных изотопов: Co^{60}, Ir^{192}, а также Ra и Rn.

Прибор представляет собой счетную линейку карманного размера с двумя движками и несколькими шкалами; он позволяет учитывать зависимость времени экспозиции от мощности источника излучения, расстояния источника от пленки-экрана, от толщины испытываемого материала и от требуемой плотности изображения на пленке. *В. М. Брадис*

4657. Прибор для расчета радиографической экспозиции (Radiographic exposures. B. S. C. R. A. calculator), Iron and Steel, 1953, 26, № 11, 470 (англ.)

См. реф. 4656.

4658. Теория информации. Естественно-научная теория обработки сообщений. Земанек (Informationstheorie. Die naturwissenschaftliche Lehre der Nachrichtenbearbeitung. Zemanek Heinz), Wiss. und Weltbild, 1953, 6, № 10, 200—211 (нем.)

Дается обзор теории информации. По мнению автора, теория информации характеризует современный этап развития техники связи, когда не только аппаратура связи, но и самые передаваемые сообщения делаются объектом инженерных расчетов и измерений. Автор считает, что предметом теории информации являются физические закономерности, общие всем процессам обработки сообщений. Среди областей применения указаны теория сигналов, теория упреждения («предсказания»), теория кодирования, теория вычислительных машин, теория регулирования. По мнению автора, теория информации сложилась в результате разработки методов количественной оценки информации, применения статистических методов к задачам связи и развития методов автоматического регулирования. В статье в основном обсуждаются эти три направления. Разработку методов количественной оценки информации автор характеризует как атомистическую теорию информации, понимая под «атомом сообщения» двоичный разряд. Автор отделяет теорию информации от так называемой кибернетики Н. Винера. Особенно критикуется утверждение Винера о враждебности автоматики человеку.

Критика кибернетики автором не вполне последовательна. Некоторые общие положения автора неприемлемы с точки зрения диалектического материализма. *Г. Н. Поваров*

4659. Человеческий мозг, электронные машины и философия. Голдсмит (Cerveaux humains, machines électroniques et philosophie. Goldsmith Maurice), Electronique, 1953, № 82, 35 (франц.)

Приводятся краткие данные о виртуозах-вычислителях (Биддер, Дазе, Инауди и др.). Их результаты сравниваются с достижениями электронной вычислительной техники. Статья содержит ряд ненаучных утверждений в духе кибернетики. *Г. Н. Поваров*

4660. От вычислительных электронных машин к человеческому мозгу. Уайо (Des machines à calculer éléctroniques au cerveau humain. Hoyaux Max), Sci. et. technique, 1953, **11**, № 5—6, 66—74 (франц.)

Первая часть популярной статьи об электронных машинах и кибернетике (РЖМат, 1954, 2781).

Дается краткое описание в самой общей форме принципов построения вычислительных машин, механических, релейных и электронных. Автор особо останавливается на возможностях применения двоичной системы, роли триггерных ячеек, на различных видах запоминающих устройств и приходит к выводу, что вычислительную машину нельзя сравнивать с мозгом, поскольку она является лишь «рабом», выполняющим заложенную в нее программу, которая составлена человеком. *К. А. Семендяев*

4661 К. Логарифмическая линейка в кораблевождении. Вайсман Л. С., 2-е изд., 104 стр., Воен.-мор. изд-во, М., 1953, 1 р. 70 к.

4662 РЕЦ. Автоматические цифровые вычислительные машины. Бут, Бут (Automatic digital calculators. Booth A. D., Booth K. H. V., 231 pp., 128 figs, Butterworths Scientific Publications, 1953, 32 s.) [**Рецензия Принз** (Prinz D.), Electronic Engng, 1954, 26, № 312, 84 (англ.)]

4663 РЕЦ. Цифровые вычислительные машины и моделирующие устройства и методы вычислений (Digiatal and analog computers and computing methods. Symposium at the 18th Applied Mechanics Division Conference of the American Society of Mechanical Engineers, June 18—20, 1953, 64 pp., New York, 1953) [**Рецензия: Свифт** (Swift C. J.), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, 7, № 44, 256—257 (англ.)]

4664 РЕЦ. Быстрее мысли. Ред. **Бауден** (Faster than thought. Bowden B. V. (ed), 416 pp.), Isaac Pitman and Sons, Ltd, London, 1953, 35 s.) [**Рецензии: Крейвен** (Craven T. L.), Electronic Engng, 1953, 26, № 312, 86; **Буххольц** (Buchholz W.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, 41, № 10, 1550—1551 (англ.)]

Книга является сборником статей по цифровым вычислительным машинам; она состоит из трех частей: общие принципы устройства, описание существующих вычислительных машин и их применения.

4665 П. Интегратор. Сперри (Integrator. Sperry Albert F.) [Panellit, Inc., Chicago, Иллинойс, США]. Пат. США 2637496, кл. 235—61, 5.05.53

Одна из возможных разновидностей фрикционного интегратора. Интегрирующий ролик фрикцион-

но сцеплен с плоскостью круглого диска, вращающегося с постоянной угловой скоростью. Перемещение ролика вдоль радиуса диска осуществляется при помощи кулачка, жестко связанного с этим диском; форма кулачка определяется видом интегрируемой функции, заданной в полярных координатах

$$R = \varphi(\alpha).$$

Угол поворота β ролика (а следовательно, и показания счетчика, связанного с роликом) будет определяться из уравнения

$$\beta = \frac{1}{r}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi(\alpha)\, d\alpha,$$

где r — радиус ролика. Пределы интегрирования задаются интервалом времени, в течение которого ролик фрикционно сцеплен с вращающимся диском.

Г. О. Фридлендер

4666 П. Прибор для вычисления интегралов. Редхеффер (Computer for evaluating complex integrals. Redheffer Raymond M.) [The United States of America, the Secretary of Navy, США]. Пат. США 2638269, кл. 235—61, 12.05.53

Прибор состоит из двух групп делителей напряжения (потенциометров) по n делителей в каждой. Делители каждой группы условно расставлены с интервалом Δx вдоль обобщенной координаты x. Одна группа приключена параллельно к одному общему источнику тока. Делители второй группы приключены к ползункам (движкам) соответствующих делителей первой группы.

Ползунки делителей первой группы устанавливаются таким образом, чтобы напряжение каждого из них, по отношению к общей точке, было равно значению $a_k = f(x_k)$. Ползунки делителей второй группы установлены так, чтобы на них приходилась часть $b_k = g(x_k)$ от напряжения a_k соответствующего делителя первой группы. Все эти ползунки через добавочные сопротивления приключены к одному концу вольтметра, второй конец которого соединен с общей точкой источника тока. Вольтметр позволяет определить сумму произведений $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k$, которая приближенно соответствует интегралу

$$\int_0^n f(x)\, g(x)\, dx \approx \sum_{k=0}^{n} a_k b_k.$$

Л. И. Гутенмахер

4667 П. Машина для перевода чисел из десятичной системы в двоичную. Боуйер, Картрайт (Decimal to binary conversion machine. Bowyer Aldred W., Cartwright John R.) [British Tabulating Machine Co., Ltd., Лондон, Англия]. Пат. США 2647689, кл. 235—60.38, 4.08.53

Машина производит перевод числа из десятичной системы в двоичную. Число в десятичной системе набирается на клавиатуре. Введенное число последовательно делится на основание новой системы, в которую оно переводится, т. е. в данном случае на два. Получаемое значение числа в двоичной системе перфорируется на карте.

А. Л. Леймер

4668 П. Записывающая счетная машина. Кросман (Skrivande räknemaskin. Crosman L.P.) [Monroe Calculating Machine Co., Оранж, Нью-Джерси, США]. Швед. пат. 139701, кл. 42 m. 29, 24.03.53

4669 П. Прибор для расчета корма. Кристиансен (Feed calculator. Christiansen James B.) [General Mills, Inc.]. Пат. США 2642224, кл. 235—83, 16.06.53

Вычислительное устройство для получения норм корма птиц в зависимости от их живого веса и яйценоскости. Представляет собой номограмму с подвижными частями, оформленную в виде счетного диска.

В. М. Брадис

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

4670. Предварительное сообщение об электронном запоминающем устройстве для хранения графиков полетов самолетов (Preview of electronic flight plan storage system), Tele-Tech, 1953, **12**, № 9, 11 (англ.)

Краткое сообщение о разрабатываемом исследовательской группой фирмы «Ремингтон Ранд» электронном устройстве для решения задач, связанных с управлением воздушным транспортом.

Это устройство, установленное на центральном диспетчерском пункте, может автоматически обслуживать трассу, на которой одновременно совершают рейсы до 2000 самолетов. В качестве основного элемента устройства используется магнитный барабан, на котором записываются графики полетов различных самолетов. Графики полетов передаются с мест на диспетчерский пункт по телеграфу, сравниваются с записанными на магнитном барабане, анализируются и затем или принимаются, или исправляются согласно обстоятельствам и в исправленном виде автоматически передаются обратно на места. Знаки телетайпа записываются со скоростью 23 000 в 1 сек. Емкость барабана 312 000 знаков. Сравнение 18 первых знаков индивидуального графика со всеми 2000, записанными на барабане, производится за 0,4 сек.

Указывается, что опытный образец такого устройства должен демонстрироваться осенью 1953 г.

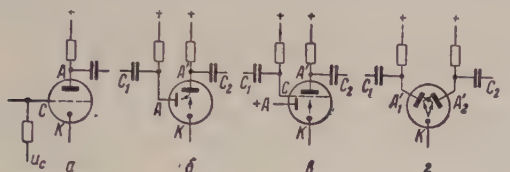
В. Н. Аверин

4671. Электронные переключатели (Elecktronische Relais und Wähler), Techn. Rundschau, 1953, 45, № 35, 2—3,5 (нем.)

Рассматриваются вопросы использования электронных ламп в качестве переключателей в технике связи. Изучение применения электронных переключателей для коммутации велось в двух направлениях. Одно связано с работами фирмы «Филлипс» (Philips) в Голландии, а другое с работами лаборатории «Белл» в США. В обоих случаях изучались селекторные устройства телефонных станций. Европейские работы велись на

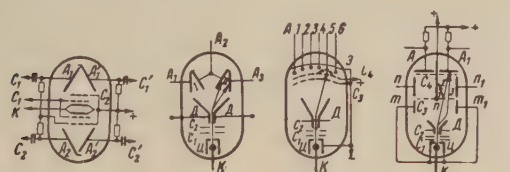
основе десятичной системы счисления, а американские — на других системах.

В декадной станции телефонный диск непосредственно управляет искателем, а недекадная станция вначале запоминает набранный номер на регистре, пересчитывает его в команду для искателей, производит проверку правильности выбранной линии связи и в зависимости от результатов производит включение (соединение).



К реф. 4671 Рис. 1

Вначале в качестве переключателей пытались использовать обычные приемно-усилительные лампы. Однако свойственные ламповым вентилям односторонняя проводимость и инвертирование фазы явились препятствием к применению их в технике связи. На рис. 1 показаны этапы разработки новых типов ламп фирмы «Филлипс». В вентильных лампах используется явление вторичной эмиссии, которое является вредным для обычных. Простейшая конструкция вентильной лампы со вторичной эмиссией показана на рис. 1,*б*. Электроны, излученные катодом, бомбардируют вспомогательный анод A', который излучает поток вторичных электронов. Вторичные электроны улавливаются анодом A. Величина тока анода A' зависит от напряжения на аноде A. Следовательно, изменение напряжения на аноде A вызывает изменение напряжения на вспомогательном аноде A'. Таким образом, импульсы, подведенные к конденсатору C_1, передаются в той же фазе на конденсатор C_2. Недостатками вентиля подобного типа являются одностороннее действие и сложность совместной работы с вентилями других типов. Последнее затруднение устраняется путем введения в лампу управляющей сетки (см. рис. 1,*в*). Контакт в этом случае осуществляется между сеткой C и анодом A'.



К реф. 4671 Рис. 2

Вентиль двустороннего действия можно получить, если оба анода изготовить из материала, излучающего вторичные электроны, и установить их под острым углом друг к другу (см. рис. 1,*г*). Двусторонняя связь в этой лампе осуществляется за счет встречных потоков вторичных электронов от одного анода к другому. Управление потоком первичных электронов производится при помощи управляющей сетки. Конструкция лучевого тетрода с двумя контактами показана на рис. 2,*а*. Двойные вентильные лампы полностью заменяют реле с двумя контактами. Преимуществами их являются быстродействие и надежность работы, недостатками — необходимость источников питания нескольких номиналов напряжений и наличие накаливаемого катода. В случае использования данной лампы в качестве переключающего реле необходимо иметь раздельные выводы от сеток.

Конструкция переключающей лампы с отклонением луча показана на рис. 2,*б*. В лампе используется электронная оптика (электроды $Ц$, C_1 и C_2). Переключение с одного направления на другое осуществляется путем установки электронного луча на соответствующую пару анодов (I или II). Луч устанавливается путем подачи управляющего напряжения на отклоняющие пластины $Д$. Конструкция аналогичной лампы одностороннего действия показана на рис. 2,*в*. В конструкции лампы использован принцип, показанный на рис. 1,*в*. Дополнительными электродами являются сетка C_3 и экран $Э$. В зависимости от напряжения на отклоняющих пластинах луч перемещается от одного анода к другому. Положение луча фиксируется посредством вспомогательного напряжения. Лампы подобной конструкции на десять направлений применяются в современных вычислительных устройствах (РЖМат, 1954, 3912, 3913). Подобные счетные лампы работают со скоростью до 30 000 импульсов в 1 сек. Малая инерционность переключающих ламп позволяет применять их для подключения нескольких телефонных линий к одному проводу.

Конструкция переключающей лампы, не критичной к величине управляющего импульса, подаваемого на отклоняющие пластины, показана на рис. 2,*г*. Лампа имеет следующие вспомогательные электроды: перегородку $П$ с двумя сетками (C_3 и C_4), удерживающие электроды (n и n_1) и ограничивающие электроды (m и m_1). Положительный потенциал на $П$ отклоняет луч в направлении *1*. Импульсы положительной полярности, подаваемые на n, отклоняют луч в направлении *3*. Электрод m препятствует переходу луча на электроды n. В результате луч остается в положении *2*, заданном отклоняющими пластинами под воздействием поданного на них напряжения. Положительные импульсы, подаваемые на электроды n, нейтрализуют отклоняющее действие электродов $П$. Электрод m ограничивает отклонение луча, которое может иметь место при подаче на отклоняющие пластины напряжения, превышающего по величине номинальное значение.

Сотрудники лаборатории «Белл» занимались разработкой газоразрядных ламп с целью создания конструкции импульсной телефонной станции, работающей по принципу «всегда один вызов».

Разработаны диод, пентод и восьмиполюсная лампа. В качестве переключателя для звуковых частот разработана контактная трубка с двумя стержнями из пермалоя. Стержни осуществляют контакт в результате воздействия на них магнитного поля. На высоких частотах контакт осуществляется ртутным переключателем.

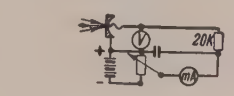
Фирма «Сименс и Гальске» (Siemens und Halske) разработала счетчик совпадений на тиратроне в качестве указателя тарифной зоны. Электронный указатель зон требует только наличия одного импульсного генератора на каждую станцию и датчиков импульсов по числу линий связи. Электромагнитные же указатели зон требуют значительно больших затрат и в ряде случаев не в состоянии решить поставленные перед ними задачи.

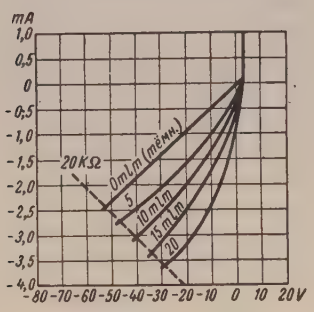
В. А. Зимин

4672. Фотоэлектрический переключатель для измерений, сортировки и счета в промышленном производстве. Лауде (Ein lichtelektrischer Stufenschalter zum Messen, Sortieren und Zählen in der industriellen Fertigungstechnik. Laude F.), Regelungstechnik, 1953, **1**, № 5,106—109 (нем.)

Измерительные устройства для проверки качества, сортировки и счета готовых изделий могут быть построены путем применения зеркального гальванометра, фотоэлемента и тиратрона.

Фотосопротивления и полупроводниковые фотоэлементы (германий типа *n*) позволяют получать





К реф. 4672

фототок порядка нескольких миллиампер. Фотоэлементы этих типов имеют достаточно малые размеры. Следует заметить, что фотосопротивлениям свойственна инерционность. Например, для кадмиево-сульфидных фотосопротивлений уменьшение фототока на частоте 1000 *гц* составляет около 60%. Однако для задач технического контроля такая частотная зависимость не играет роли, так как частота переключений обычно не превышает 100 *гц*. Если же имеется необходимость в быстродействующем устройстве, то можно применять германиевые фотоэлементы, частотная характеристика которых линейна примерно до 200 *кгц*.

Германиевый фотоэлемент представляет собой триод. Основной частью фотоэлемента является маленькая шайба из германия типа *n*. В шайбе проточена сферическая выемка с наибольшей глубиной около 0,075 *мм*. В выемку установлена пружина из фосфористой бронзы, служащая электродом. Основная характеристика германиевого фотоэлемента приведена на рисунке. Эти фотоэлементы работают от источника света незначительной мощности. Спектральная характеристика весьма пологая. Максимум чувствительности находится в инфракрасной области. Особенностью германиевого фотоэлемента является то, что светочувствительный участок имеет резко выраженную границу. Уже на расстоянии 0,1 *мм* от светочувствительного места чувствительность падает на 50%. Таким образом, управлять фотоэлементом можно при помощи световой точки.

В качестве усилителя мощности используется тиратрон — тетрод. Наличие второй сетки в лампе устраняет влияние нагрузки на входную цепь. В схеме ступенчатого переключателя лампа работает как управляемый выпрямитель. Анодной нагрузкой лампы является электромагнит, управляющий клапанами.

Приведены электрическая схема ступенчатого переключателя и ее описание. *В. А. Зимин*

4673. Автоматическое управление. Что достигнуто при помощи саморегулирующихся механизмов? Насколько далеко они могут пойти? (Automatic control. What has been achieved by self-regulating mechanisms? How much further can they go?), Australas. Manufacturer, 1953, **38**, № 1948, 46—51, 56—57 (англ.)]

4674 РЕЦ. Принципы импульсно-кодовой модуляции. Майер (Prinzipien der Pulse - Code-Modulation. Mayer H. F., 76 s., 25 fig., Siemens und Halske, Berlin, 1952) [**Рецензия: Стрэнд** (Strandh E. S.), Tekn. tidskr., 1954, 84, № 1, 19 (швед.)]

4675 РЕЦ. Электрические системы управления. Джонс (Electric control systems. Jones Richard W., 311 + XVI pp., 118 figs, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1953, 6.50 doll.) [**Рецензия: Мигер** (Meagher R. E.), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 10, 970 (англ.)]

4676 РЕЦ. Основы промышленной электроники. Дау (Fundamentals of engineering electronics. Dow W. G., 627 pp., 117 figs, John Wiley and Sons, Inc., New York, Chapman and Hall Ltd., London, 1952, 68 s.) [**Рецензия: Атри** (Attree V. H.), Electronic Engng, 1953, **25**, № 305, 307 (англ.)]

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абаннин А. 4654
Агарвал 4454
Айзак 4608
Александрийский Б. И. 4443 Д
Алексевич 4475, 4482
Альбертони 4493
Андерсен 4458
Андреев П. П. 4506 К
Антосевич 4418
Артин 4353 РЕЦ
Атри 4676 РЕЦ
Аффорд 4599
Ацел 4535

Б

Бакельман И. Я. 4561
Баяда 4445
Бедельбаев А. К. 4439 Д
Безирганян П. А. 4471
Белман 4420 К
Белостоцкий А. Я. 4579
Бенадо 4366
Бер 4592
Бергман 4494
Берджер 4491
Берман 4433
Бертолини 4459
Билимович 4407
Блюментал 4577 К
Бозе 4567
Боль 4543 РЕЦ
Бомпьяни 4562
Бомстра 4538 К
Борель 4350 К
Боровский И. Б. 4471
Борсук 4368
Боуйер 4667 П
Браун 4481
Браун 4649
Брейжер 4627
Брёйнс 4314 К
Бриллюэн 4504
Брукер 4624
Брусотти 4536
Брюкнер 4352 РЕЦ
Булиган 4463 К
Бурбаки 4353 РЕЦ
Бут 4662 РЕЦ
Бут 4662 РЕЦ
Буххольц 4664 РЕЦ

В

Вайсман Л. С. 4661 К
Вальфиш А. З. 4333
Ван 4625
Ван Хао 4328 К
Василенко Н. Г. 4442 Д
Ватанабе 4449
Ваук 4480
Вачнадзе Г. 4550 К
Вейль 4327
Вейнберг 4530
Вен 4351 РЕЦ
Вермс 4465
Винтнер 4416
Вишик 4424
Воделанн 4451, 4452
Вучкич 4290
Вяль М. 4587

Г

Галилей 4316 К
Гальперин 4485, 4489
Ганя 4372, 4377
Гепперт 4607 РЕЦ
Гжегорцик 4369
Гиленко Н. Д. 4396
Гилмор 4331 К
Гинсберг 4385
Гловацкий 4600
Гнеденко 4310, 4311
Годо 4554
Гоин 4523
Голдсмит 4659
Граффи 4431
Граэф—Фернандес 4545
Григорьян А. Т. 4317 К
Гросникл 4352 РЕЦ
Гудстейн 4305 РЕЦ, 4332 РЕЦ
Гумбель 4531
Гупта 4453
Гюттингер 4492

Д

Дабони 4428
Давыдов 4523
Далецкий Ю. Л. 4498 Д
Данжуа 4393 К
Дау 4676 РЕЦ
Дейвид 4517
Детуш 4539 К
Джейкобсон 4354 РЕЦ
Джемс-Леви Г. Е. 4598 Д
Джонс 4675 РЕЦ
Дим 4609
Дитль 4528
Дубнов Я. С. 4556
Дьёдонне 4354 РЕЦ
Дюпюи 4410

Е

Ефимов Н. В. 4541 К

Ж

Жаффар 4361
Жичковский 4604 К

З

Залманович З. И. 4367 Д
Зауэр 4438
Земанек 4658

И

Ито 4426
Ито 4508 К

Й

Йонас 4559
Йосида 4425

К

Кавада 4379 К
Камалов М. К. 4532
Камат 4512
Кастанье 4593
Кастор 4304 К
Капланский 4363
Карвалью 4374
Карлиц 4340, 4341, 4342, 4343, 4344
Картрайт 4667 П
Кафьеро 4383 К
Кац 4502
Квенсель 4514
Кемп 4302 К
Кертес 4358
Кинг 4516
Киприянов И. А. 4400 Д
Кифер 4524
Клаври 4588
Клелленд 4548
Кли 4483
Кнастер 4371
Козик Е. М. 4596
Койцш 4606 РЕЦ
Коллер 4607 РЕЦ
Колмогоров А. Н. 4411
Комату 4405
Костарчук В. Н. 4499 Д
Красовский Н. Н. 4412, 4413
Крафт 4530
Крейвен 4664 РЕЦ
Крейн М. Г. 4414
Кристиансен 4669 П
Кросман 4668 П
Крубек 4456
Куайн 4326
Куджани 4493
Кудрявцев Л. Д. 4408
Куратовский 4369
Кустаанхеймо 4565
Кучера 4544

Л

Ладд 4616
Лангер 4329 К
Лауде 4672
Лах 4513
Лашенов К. В. 4395
Лебедев Л. Л. 4441 Д
Леви 4576
Леви 4503
Леккеркеркер 4338
Ленц 4557
Линник Ю. В. 4337
Лион 4422
Лич 4455
Лоренц 4486
Лорх 4394, 4447
Лоткин 4582
Лохер-Эрнст 4543 РЕЦ
Лу Ци-цзянь 4287
Лувсанцерен Ш. 4525 Д

Лузин Н. Н. 4382 К
Льюис 4519
Льюк 4599
Люстерник Л. А. 4578 К

М

Мадзарелла 4448
Майер 4674 РЕЦ
Макки 4359
Мак-Нотон 4328 К
Мак-Фадден 4450
Малхолленд 4501
Мандзюк А. И. 4546
Мания Г. М. 4518
Маркс 4568
Масгрейв 4644
Мейер-цур-Капеллен 4597 РЕЦ
Мелвин 4496
Менар 4318 К
Мерри 4646
Мертон 4352 РЕЦ
Меснер 4583
Мёрфи 4594
Мигер 4675 РЕЦ
Микусинский 4403
Миллер 4349
Минорский В. П. 4542 К
Мичке 4304 К
Млудек 4597 РЕЦ
Мозер 4417
Морделл 4335
Моц 4495
Мошман 4520
Мун 4423
Мурога 4527
Мушиц Н. П. 4360 Д
Мчедлишвили Е. 4550 К

Н

Надь (см. Сёкефалви-Надь)
Накано 4485
Нараяна - Сингх 4469, 4470
Несмеянов А. Н. 4282, 4283
Нёймер 4392
Никаидо 4487
Никольский С. М. 4381, 4444
Новак 4386
Новотный 4387, 4388, 4391
Ножичка 4564
Норрис 4390
Нортроп 4303 К
Ньюбери 4348

О

Оман 4575
Онищик А. Л. 4375
Оно 4488
Орлич 4475, 4482
Орличек 4595
Отроков Н. Ф. 4415
Оттестад 4515

П

Палама 4466
Парадин 4533 К
Пароди 4357 РЕЦ
Пастидес 4401
Пейн 4569
Пешль 4404
Пидек 4566
Пик 4352 РЕЦ
Пинль 4563
Пихлер 4585, 4586
Пласс 4473
Понтрягин Л. С. 4376
Попов Е. П. 4429
Пранди 4308
Привалов И. И. 4540 К
Принз 4662 РЕЦ

Р

Радо 4389
Ратерфорд 4355 РЕЦ
Рашфорт 4467
Редхеффер 4666 П
Рейк 4529
Рейснер 4432
Рейхбах 4371
Риветт 4533 К
Риво 4463 К
Рид 4614
Риджуэй 4610
Ринов 4573
Риордан 4341
Робертс 4436
Робинсон 4332 РЕЦ
Роддам 4643
Роджерс 4571
Роз 4322, 4324
Рой 4521
Россер 4602 К
Росси 4397
Ротштейн 4406
Рудаев А. К. 4552 К
Рудин 4462 К
Рускони 4589
Рыжов Н. Н. 4553 Д

С

Садыков Х. У. 4315 К
Саймонс 4323
Сакович Г. Н. 4297
Сандем 4339
Санелевич 4345
Сансоне Дж. 4419 К
Сас 4537
Свифт 4663 РЕЦ
Селе 4358
Сен 4510
Серпинский 4384
Серрелл 4613
Сёкефалви - Надь 4478, 4534
Сикорский 4476, 4477
Симада 4373
Сингх 4302 К
Систрунк 4301 К
Сколем 4319
Смирнов 4378
Сосновский 4549
Спеккер 4325
Спенсер 4423
Спенсер 4632
Сперо 4615
Сперри 4665 П
Стоил 4356 РЕЦ
Странд 4674 РЕЦ
Су Бу-цин 4558
Судаков В. А. 4437
Суэрлинг 4529

Т

Тагамлицки Я. 4484
Тагамлицкий 4484
Такеути 4379 К
Тамура 4490
Танимура 4474 К
Татон 4307
Тауски 4357 РЕЦ
Тихомирова Е. С. 4560
Тольятти 4555
Томпсон 4644
Томсон 4494
Точер 4356 РЕЦ
Трикоми 4505

У

Уайлдер 4299
Уайли 4547
Уайо 4660
Уилер 4626
Унковский В. А. 4507
Уокер 4602 К
Уотсон 4334
Уэртхейм 4486

Ф

Файвел 4473
Фальк 4364
Фаррингтон 4306
Федоров 4409
Фейс 4330 К
Феттер 4309
Флейшер 4362
Фостер 4300
Фрёйд 4402
Фрёйденталь 4370, 4652
Фукс 4358
Фуруцу 4435

Х

Хаг 4421 РЕЦ
Хадсон 4302 К
Хазенйегер 4320
Хайош 4288
Харкеевич Ю. Ф. 4584
Хармут 4611
Хартман 4416
Хауснер 4427
Хахубия 4460 К
Хегорд 4590
Хён 4572 К
Хилдебранд 4580.
Хинчин А. Я. 4461 К
Хобсон 4302 К
Хоппе 4591
Хоссу 4446
Ху Хай-чан 4472

Ц

Цаппе 4606 РЕЦ

Ч

Чалый А. Т. 4551 К
Чжун 4502

Ш

Шайдуков К. М. 4399 Д
Шатлен 4355 РЕЦ
Шафрановский И. И. 4312
Шварц 4349
Шевело В. Н. 4440 Д
Шелдон 4616
Шентон 4398
Шефке 4468
Шефль 4526
Шеффер 4479
Шёнберг 4570
Шилов 4497
Широкорад Б. В. 4500
Шлибс 4612
Шмидт 4305 РЕЦ
Шне 4351 РЕЦ
Шолендер 4574
Шоу 4625
Шпейзер 4617
Шрикханде 4522
Штейнхаус 4511
Шу 4430
Шураньи 4346
Шуэтман 4649

Э

Эйдельнант М. И. 4509
Эйткин А. 4581
Эглстон 4380
Эллис 4365
Эллис 4489
Эмерслебен 4347
Эрве 4404
Эрдёш 4389, 4571
Эрселл 4434
Эстерман 4336

Я

Яничак 4321
Янкович 4291, 4292, 4457

A

Aczél J. 4535
Agarwal R. P. 4454
Albertoni S. 4493
Alexiewicz A. 4475, 4482
Andersen E. S. 4458
Antosiewicz H. A. 4418
Artin E. 4353 **РЕЦ**
Attree V. H. 4676 **РЕЦ**

B

Baehr H. D. 4592
Baiada E. 4445
Bellman R. 4420 **К**
Benado M. 4366
Berger A. 4491
Bergmann P. G. 4494
Berman A. S. 4433
Bertolini F. 4459
Bilimovitch A. 4407
Blumenthal L.-M. 4577 **К**
Bol G. 4543 **РЕЦ**
Bompiani E. 4562
Boomstra W. 4538 **К**
Booth A. D. 4662 **РЕЦ**
Booth K. H. V. 4662 **РЕЦ**
Borel É. 4350 **К**
Borsuk K. 4368
Bose S. N. 4567
Bouligand 4463 **К**
Bourbaki N. 4353 **РЕЦ**
Bowyer A. W. 4667 **II**
Brazier L. G. 4627
Brillouin L. 4504
Brooker R. A. 4624
Brown A. 4481
Brown S. L. 4649
Brueckner L. J. 4352 **РЕЦ**
Bruins E. M. 4314 **К**
Brusotti L. 4536
Buchholz W. 4664 **РЕЦ**

C

Cafiero F. 4383 **К**
Carlitz J. 4340, 4341 4342, 4343, 4344
Cartwright J. R. 4667 **II**
Carvalho C. A. A. de 4374
Castanié H. 4593
Castor J. 4304 **К**
Chattelun L. 4355 **РЕЦ**
Christiansen J. B. 4669 **II**
Chung K. L. 4502
Claverie J. 4588
Clelland R. C. 4548
Craven T. L. 4664 **РЕЦ**
Crosman L. P. 4668 **II**
Cugiani M. 4493

D

Daboni L. 4428
David H. A. 4517
Davidoff M. D. 4523
Denjoy A. 4393 **К**
Destouches J.-L. 4539 **К**
Diehm I. C. 4609
Dieudonné J. 4354 **РЕЦ**
Ditl A. 4528
Dow W. G. 4676 **РЕЦ**
Dupuy M. 4410

E

Eggleston H. G. 4380
Ellis D. 4365
Ellis H. W. 4489
Emersleben O. 4347
Erdös P. 4389, 4571
Erwe F. 4404
Estermann Th. 4336

F

Falk G. 4364
Farrington B. 4306
Feys R. 4330 **К**
Fiodorov V. S. 4409
Fivel D. **К**. 4473
Fleischer I. 4362
Foster J. E. 4300
Freud G. 4402
Freudenthal H. 4370, 4652
Fuchs L. 4358
Furutsu K. 4435

G

Galilei G. 4316 **К**
Ganea T. 4372, 4377
Geppert M. P. 4607 **РЕЦ**
Gilmore P. C. 4331 **К**
Ginsburg S. 4385
Glowatzki E. 4600
Gnedenko B. V. 4310, 4311
Godeaux L. 4554
Goheen H. W. 4523
Goldsmith M. 4659
Goodstein R. L. 4305 **РЕЦ**, 4332 **РЕЦ**
Graef Fernàndez C. 4545
Graffi D. 4431
Grossnickle F. E. 4352 **РЕЦ**
Grzegorczyk A. 4369
Gumbel E. J. 4531
Gupta H. C. 4453
Güttinger W. 4492

H

Haag J. 4421 **РЕЦ**
Hajós G. 4288
Halperin I. 4485, 4489
Harmuth H. 4611
Hartman Ph. 4416
Hasenjaeger G. 4320
Hausner M. 4427
Heegaard Fr. 4590
Hildebrand F. B. 4580
Hobsoú E. W. 4302 **К**
Höhn W. 4572 **К**
Hoppe E. 4591
Hosszú M. 4446
Hoyaux M. 4660
Hudson H. P. 4302 **К**

I

Isaac E. J. 4608
Itô S. 4426

J

Jacobson N. 4354 **РЕЦ**
Jaffard P. 4361
Janiczak A. 4321
Jankovič Z. 4291, 4292, 4457
Jonas H. 4559
Jones R. W. 4675 **РЕЦ**

K

Kac M. 4502
Kamat A. R. 4512
Kaplansky I. 4363
Kempe A. B. 4302 **К**
Kertész A. 4358
Kiefer J. 4524
King E. P. 4516
Klee V. L., Jr. 4483
Knaster B. 4371
Koetzsch R. 4606 **РЕЦ**
Koller S. 4607 **РЕЦ**
Komatu Y. 4405
Kraft L. G. 4530
Krubeck E. 4456
Kučera J. 4544
Kuratowski C. 4369
Kustaanheimo P. 4565

L

Ladd D. W. 4616
Lah I. 4513
Langer S. K. 4329 **К**
Laude F. 4672
Leach E. 4455
Lekkerkerker C. G. 4338
Lenz H. 4557
Levi F. W. 4576
Lévy P. 4503
Lewis T. 4519
Lions J.-L. 4422
Locher-Ernst L. 4543 **РЕЦ**
Lorch L. 4394, 4447
Lorentz G. G. 4486
Lotkin M. 4582
Luke Y. L. 4599

M

McFadden L. 4450
Mackey G. W. 4359
McNaughton R. 4328 **К**
Marx G. 4568
Mayer H. F. 4674 **РЕЦ**
Mazzarella F. 4448
Meagher R. E. 4675 **РЕЦ**
Melvin A. M. 4496
Merry I. W. 4646
Merton E. L. 4352 **РЕЦ**
Mesnard J. 4318 **К**
Messner R. 4583
Meyer zur Capellen W.G. 4597 **РЕЦ**
Mikusiński J. 4403
Miller K. S. и 4349
Mludek H. 4597 **РЕЦ**
Mitschke W. 4304 **К**
Moon P. 4423
Mordell L. J. 4335
Moshman J. 4520
Moser J. 4417
Motz L. 4495
Mulholland H. P. 4501
Muroga S. 4527
Murphy L. J. 4594
Musgrave J. R. 4644

N

Sz.-Nagy B. (см. Szökefalvi-Nagy G. 4478, 4534)
Nakano H. 4485
Narayana Singh U. 4469, 4470
Neumer W. 4392
Newbery E. V. 4348
Nikaidô H. 4487
Norris M. J. 4390
Northrop E. P. 4303 **К**
Novák J. 4386
Novotný M. 4387, 4388, 4391
Nožička F. 4564
Nyeszmejanov A. N. 4283
Nyikoljszkij Sz. M. 4444

O

Ohmann D. 4575
Ono T. 4488
Orlicek A. F. 4595
Orlicz W. 4475, 4482
Ottestad P. 4515

P

Palamá G. 4466
Paradine Ch. G. 4533 **К**
Parodi M. 4357 **РЕЦ**
Pastidès N. 4401
Payne W. T. 4569
Peak Ph. 4352 **РЕЦ**
Peschl E. 4404
Pichler O. 4585, 4586
Pidek H. 4566
Pinl M. 4563
Plass G. N. 4473
Prandi A. 4308
Prinz D. 4662 **РЕЦ**

Q

Quensel C. F. 4514
Quine W. V. 4326

R

Rado R. 4389
Redheffer R. M. 4666 **II**
Reed I. S. 4614
Reich E. 4529
Reichbach M. 4371
Reissner E. 4432
Ridgway R. K. 4610
Rinow W. 4573
Riordan J. 4341
Rivaud 4463 **К**
Rivett B. H. P. 4533 **К**
Roberts T. E., Jr. 4436
Robinson A. 4332 **РЕЦ**
Roddam Th. 4643
Rogers C. A. 4571
Rose A. 4322, 4324
Rosser J. B. 4602 **К**
Rossi F. - S. 4397

Rothstein W. 4406
Roy P. M. 4521
Rudin W. 4462 К
Rusconi F. 4589
Rushforth J. M. 4467
Rutherford D. E. 4355 **РЕЦ**

S

Sandham H. F. 4339
Sanielevici S. 4345
Sauer R. 4438
Schäffer J. J. 4479
Schäfke F. W. 4468
Schliebs G. 4612
Schmidt A. 4305 **РЕЦ**
Schnee W. 4351 **РЕЦ**
Schoenberg I. J. 4570
Schuh H. 4430
Schwarz R. J. 4349
Schwetman H. D. 4649
Sen A. R. 4510
Serrell R. 4613
Shaw F. S. 4625
Sheldon J. W. 4616
Shenton L. R. 4398
Shimada N. 4373
Sholander M. 4574
Shrikhande S. S. 4522
Sierpiński W. 4384
Siestrunck M. Ch. 4301 К
Sikorski R. 4476, 4477
Simons L. 4323
Singh A. N. 4302 К
Skolem Th. 4319
Smirnov Yu. M. 4378
Sosnowski W. 4549
Specker E. P. 4325
Speiser A. P. 4617
Spencer D. E. 4423
Spencer R. H. 4632
Spero R. E. 4615
Sperry A. F. 4665 II
Steinhaus H. 4511
Stoll R. R. 4356 **РЕЦ**
Strandh E. S. 4674 **РЕЦ**
Suranyi J. 4346
Swerling P. 4529
Swift C. J. 4663 **РЕЦ**
Szász P. 4537
Szele T. 4358
Szökefalvi-Nagy G. 4478, 4534
Šefl O. 4526
Šilov G. E. 4497

T

Tamura T. 4490
Taton R. 4307
Taussky O. 4357 **РЕЦ**
Thompson A. B. 4644
Thomson R. 4494
Tocher K. D. 4356 **РЕЦ**
Togliatti E. G. 4555
Tricomi F. G. 4505

U

Ufford D. 4599
Ursell F. 4434

V

Veen S. C. van 4351 **РЕЦ**
Vermes P. 4465
Vetter Q. 4309
Vişic M. I. 4424
Vučkić M. 4290

W

Waadeland H. 4451, 4452
Walker R. J. 4602 К
Wan C. C. 4625
Wang Hao 4328 К
Watanabe Y. 4449
Watson G. L. 4334
Weinberg L. 4530
Wertheim D. G. 4486
Weyl H. 4327
Wheeler D. J. 4626
Wilder R. L. 4299
Wintner A. 4416
Wouk A. 4480
Wylie C. R. Jr. 4547

Y

Yosida K. 4425

Z

Zappe A. 4606 **РЕЦ**
Zemanek H. 4658
Zyczkowski M. 4604 К

伊藤清 4508 К
河田敬義 4379 К
竹内外史 4379 К
胡海昌 4472
蘇步青 4558
谷村功 4474 К
邦德里亞金 4376
陸啓鏘 4287
ბახტაძე გ. 4460

Технический редактор *К. И. Игнаткова*